

Библиотека учителя математики

**МАТЕМАТИКА  
В ПОНЯТИЯХ,  
ОПРЕДЕЛЕНИЯХ  
И ТЕРМИНАХ**

**Часть 2**

---

Библиотека учителя математики

---

# **МАТЕМАТИКА В ПОНЯТИЯХ, ОПРЕДЕЛЕНИЯХ И ТЕРМИНАХ**

## **Часть 2**

Под редакцией Л. В. САБИНИНА

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1982



ББК 74.262  
М23

О. В. МАНТУРОВ, Ю. К. СОЛНЦЕВ, Ю. И. СОРКИН, Н. Г. ФЕДИН

*Рекомендовано  
Главным управлением школ  
Министерства просвещения СССР*

**Математика** в понятиях, определениях и терминах. Ч. 2/  
М 23 О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. И. Соркин, Н. Г. Федин;  
Под ред. Л. В. Сабинина. — М.: Просвещение, 1982.—351с. —  
(Б-ка учителя математики).

Предлагаемое пособие для учителей является справочником по математической терминологии. Понятия, определения и термины, включенные в книгу, расположены в алфавитном порядке от буквы М до буквы Я. (Часть 1-я, включающая термины от буквы А до буквы Л, вышла в 1978 году.) Справочник предназначен для учителей математики, а также студентов педвузов.

М 4306010400—438  
103(03)—82

Подписное

ББК 74.262

51

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Настоящая книга является вторым томом справочного издания «Математика в понятиях, определениях и терминах», выходящего в серии «Библиотека учителя математики» издательства «Просвещение». Как мы уже указывали в предисловии к первому изданию, она адресована в первую очередь учителю математики и других смежных дисциплин, а также будущему учителю — студенту педагогического института. Необходимость изданий такого рода представлялась всегда очевидной, и более десяти лет назад в издательстве «Просвещение» тот же коллектив авторов выпустил «Толковый словарь математических терминов», который быстро разошелся и получил положительную оценку учителей, методистов и прессы. Неоднократно высказывались пожелания о переиздании этой книги. Конечно, прошедшие годы, годы научно-технической революции сильно изменили сущность, содержание и методы нашей системы образования. Изменилась и сама математика. Велась и ведется активная работа по совершенствованию и перестройке математического образования в школе.

Естественно, что в новых условиях авторы должны писать по существу новую книгу, отвечающую новым реальностям школьного математического образования и новым задачам и целям школы. Мы надеемся, что авторы справились со своей нелегкой задачей, хотя окончательным, конечно, будет мнение самого читателя.

Повторим теперь некоторые принципы, которыми мы руководствовались при построении как первого, так и второго тома данной книги. При отборе терминов предпочтение отдавалось в первую очередь тем, которые непосредственно связаны со школьным курсом математики и некоторых смежных дисциплин. Далее шли термины и понятия, связанные с обучением будущих учителей, т. е. с принятыми программами математических дисциплин педагогических институтов. Наконец, и не в последнюю очередь, необходимо было охватить важнейшие термины и понятия, характеризующие важнейшие черты математики как науки в процессе развития. Был включен в книгу и ряд терминов, имеющих, быть может, лишь исторический интерес, но позволяющих взглянуть на математику в процессе ее развития и становления. В изложении и отборе понятий были проявлены как умеренность, так и решительность: не стремясь к крайне модернистским трактовкам, что было бы явно в ущерб доступности изложения, мы тщательно изгоняли из употребления явные анахронизмы. Фундаментальные понятия и термины описаны, как правило, на точном, ясном и современном математическом языке.

В описании большинства терминов имеются ссылки на родственные термины и указана соответствующая литература, позволяющая читателю получить дополнительную информацию.

При упоминании в той или иной статье какого-либо термина, о котором в книге есть отдельная статья, последний выделен курсивом. В книге представлены и синонимы основных терминов. Термины типа «теорема Ферма», «полиномы Чебышева» и т. д. следует искать среди терминов, начинающихся с фамилии автора, в честь которого дано наименование, т. е. «Ферма теорема», «Чебышева полиномы».



и т. д. Во избежание ошибок произношения для некоторых терминов указано ударение.

Несколько слов о символике и языке книги. Так как представители различных математических наук говорят на разных, хотя и близких «диалектах» одного и того же математического языка, то унифицировать язык и символику книги такого характера было совершенно невозможно. Поэтому авторы старались каждый раз пользоваться системой обозначений и языком, свойственными области математики, к которой термин относится, указывая, где уместно, и другие принятые системы обозначений и языка.

Авторы и редактор стремились придать книге активный характер в вопросах формирования в будущем новых точек зрения на те или иные вопросы школьного и высшего педагогического образования. Так, принятое сейчас в школьном курсе математики отождествление понятия отображения и функции достаточно удобно и естественно, однако в книге, адресованной учителю, мы сочли необходимым объяснить разницу между этими двумя понятиями и проиллюстрировать те достоинства, которые такой подход дает.

Первый том книги вышел в 1978 г. и содержал термины, соответствующие буквам алфавита от А до Л включительно. Настоящий второй том содержит термины, соответствующие буквам алфавита от М до Я. Как и первый том, он снабжен обширной библиографией.

Авторы и редактор прилагали все усилия в попытке обеспечить логическое идейное и методологическое единство предлагаемого двухтомника. Сотрудничество между ними в процессе работы над книгой носило, с одной стороны, деловой и конструктивный, а с другой стороны, неформальный характер. Неоднократные и длительные обсуждения, как надеются редактор и авторы, во многом способствовали улучшению текста.

Улучшению книги способствовали рецензии И. И. Баврина, Ф. М. Барчуновой, В. А. Кондратьева.

Мы, конечно, отдаем себе отчет в том, что книга отнюдь не свободна от недостатков и упущений. Все конструктивные замечания, пожелания и предложения читателей будут с благодарностью приняты авторами и редактором и учтены в последующих изданиях.

*Л. Сабинин*



**МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ** — квадратные таблицы натуральных чисел (с одинаковым количеством строк и столбцов), имеющие одну и ту же сумму чисел по всем строкам, столбцам и диагоналям.

История возникновения М. к. относится к глубокой древности. Наиболее ранние сведения о таких квадратах содержатся, по-видимому, в китайских книгах, написанных в IV—V вв. до н. э. Из дошедших до нас древних М. к. самым «старым» является таблица Ло-шу (2200 г. до н. э.).

Таблица Ло-шу состоит из 9 клеток: 3 строк и 3 столбцов, заполненных натуральными числами от 1 до 9; в этом М. к. суммы чисел по всем строкам, столбцам и диагоналям равны одному и тому же числу 15.

Следующие по времени сведения дошли до нас из Индии и Византии. В Европе изображение М. к. встречается впервые в гравюре «Меланхолия» известного немецкого художника Альбрехта Дюрера (1514). Этот М. к. состоит из 16 клеток (4×4), заполненных натуральными числами от 1 до 16. Сумма чисел по каждой строке в нем, по каждому столбцу и каждой диагонали равна 34.

Числа 15 и 14, стоящие в нижней строке квадрата, означают дату 1514 — год издания этой гравюры А. Дюрера.

М. к. Дюрера замечателен еще другими свойствами: в нем число 34 выражает не только сумму чисел по каждой строке, каждому столбцу и каждой диагонали, а этому числу равна сумма чисел, стоящих в квадратах из четырех клеток, расположенных внутри М. к. и при четырех его вершинах. Такие М. к. следовало бы назвать супермагическими или сверхмагическими.

Способами составления М. к. занимались многие математики: в XVI в. — А. Ризе и М. Штифель, в XVII в. — А. Кирхер и Баше де Мезериак и др. Для составления М. к. с нечетным числом клеток существует очень простой общий способ. Для составления же М. к. с четным числом клеток способы уже значительно сложнее.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

В настоящее время понятие М. к. обобщено и расширено в различных направлениях. В частности, под М. к. понимают квадратные таблицы, заполненные не обязательно первыми натуральными числами. Больше того, существуют М. к., в клетках которых помещены только простые числа, и притом различные.

Нетрудно заметить, что из любого М. к. можно получить бесконечное множество других М. к. путем умножения всех его чисел на один и тот же множитель или прибавления одного и того же числа к каждому числу М. к.

М. к. свое название магических (волшебных, таинственных) получили от арабов, которые усматривали в подобных числовых свойствах и сочетаниях нечто неземное и мистическое и принимали их за своего рода талисманы.

См. также: *Многоугольные числа, Фигурные числа, Паскаля треугольник; Арифмомантия, Арифметическая прогрессия.*

Лит.: [70].

**МАЖОРАНТА** — функция  $F$ , значение которой в любой точке рассматриваемой области превосходит значение данной функции  $f$  в той же точке или значение системы функций  $\Phi$  в той же точке, т. е. — более точно — функция  $F$  удовлетворяет неравенствам  $F(x) \geq f(x)$  или  $F(x) \geq \varphi(x)$ , где  $\varphi$  — любая функция системы  $\Phi$ . При этом  $F$  называется мажорирующей, а любая функция  $\varphi$  из  $\Phi$  — мажорируемой.

Например, в области действительных значений функция  $x^2 + 1$  является М. функции  $\sin x$ ; она же является М. системы функций  $y = \sin \lambda x$ , где  $\lambda$  — любое действительное число.

Понятие М. бывает полезным во многих вопросах анализа; например, справедлива теорема: неубывающая последовательность функций сходится, если существует М. семейства всех функций, составляющих эту последовательность. М. аналитической функции  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  часто называют функцию  $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| x^k$ .

Франц. majorante от majorer — объявлять большим.

Лит.: [87].

**МАКЛОРЕНА РЯД** функции  $f$  — частный случай *Тейлора ряда* при  $a = 0$ . М. р. функции  $f$  записывается так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(h)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Например, М. р. функции  $e^x$  таков:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Если М. р. функции  $f$  сходится к самой  $f$ , то говорят о разложении  $f$  в М. р. Впервые М. р. указан Тейлором в 1715 г. Название М. р. исторически неправильно.

Лит.: [87].

**МАКСИМУМ ФУНКЦИИ:** 1°. М. ф. одной переменной  $y = f(x)$  — значение  $f(x_0)$  функции, не меньшее значений, принимаемых этой функцией при всех достаточно близких к  $x_0$  значениях аргумента (рис. 1). Формальное определение

**М. ф.:** функция  $f(x)$  имеет максимум в точке  $x_0$ , если существует окрестность  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  такая, что для всех ее точек выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0). \quad (*)$$

**2°. М. ф. нескольких переменных**  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(p)$  — значение  $f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = f(p_0)$ , не меньшее значений, принимаемых функцией во всех точках, достаточно близких к точке  $p_0$  (рис. 2, где  $n = 2$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ). Формальное определение М. ф.  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(p)$ : функция  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет максимум в точке  $p_0 (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  (другими словами,  $f(p_0) = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  есть М. ф.), если существует окрестность точки  $p_0$ , лежащая внутри области определения функции, такая, что для всех точек  $x$  этой окрестности выполняется неравенство

$$f(p) \leq f(p_0). \quad (**)$$

В случае выполнения в соотношениях  $(*)$  и  $(**)$  строгого неравенства говорят, что имеет место строгий (в узком смысле) М. ф., в противном случае — не строгий (в широком смысле) М. ф. Иногда М. ф. называют в отличие от абсолютного максимума *относительным максимумом*.

См. также *Необходимое условие* и *Достаточное условие*. Лат. *maxiimū* — наибольшее.

Лит.: [87].

**МАНТИССА** — дробная часть десятичного логарифма положительного числа. Дробная часть натурального логарифма положительного числа также называется М. Приведенные в логарифмических таблицах М. вычислены приближенно с точностью до определенного десятичного знака. М. десятичного логарифма положительного числа не изменится, если это число умножить или разделить на  $10^n$ , где  $n$  — любое целое число. Так, М. десятичных логарифмов чисел 2,5; 25; 250 будут равны, а характеристики разные: 0, 1, 2 соответственно; М. логарифмов этих чисел равна:  $\lg 2,5 = 0,3979$ .

См. также: *Целая часть действительного числа*, *Порядок положительного числа*. Лат. *mantissa* — прибавка, добавка.

**МАРКОВА НЕРАВЕНСТВО:** 1°. Неравенство, оценивающее производную многочлена  $f(x)$  по известной оценке самого многочлена на отрезке  $[-1; 1]$ . Часто используют такое следствие М. н.: если многочлен  $n$ -й степени  $f_n(x)$  не превосходит по модулю единицы, то  $|f'_n(x)| \leq n^2$ . М. н. установлено в 1889 г. русским математиком А. А. Марковым. В 1892 г. оно было обобщено В. А. Марковым, братом А. А. Маркова.

2°. М. н. в теории вероятностей — пусть  $X$  — случайная величина, принимающая только положительные значения,  $MX$  — математическое ожидание случайной величины  $X$ . Тогда (М. н.)

$$P\{X < MXt^2\} > 1 - \frac{1}{t^2}$$

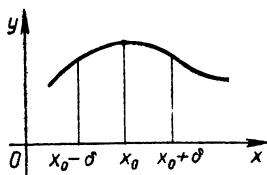


Рис. 1

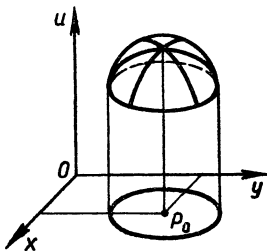


Рис. 2

для любого  $t \in R$ . Здесь  $P\{X < MXt^2\}$  означает вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение меньшее, чем  $(MX)t^2$ . М. н. применяется при доказательстве *Чебышева неравенства* в теории вероятностей.

**МАРКОВА ПРОЦЕССЫ** — важная разновидность *случайных процессов*. Пусть множество  $S$  состояний системы конечно или счетно  $\{S_1, S_2, \dots, S_n, \dots\}$ . Случайный процесс называется М. п., если вероятность того, что из состояния  $S_i$  в момент  $t_0$  система перейдет в состояние  $S_j$  в момент  $t_0 + t$  зависит только от  $t, i, j$  (и не зависит от состояния, в котором система находилась в моменты времени, предшествующие  $t_0$ ). Эти вероятности обозначаются  $P_{ij}(t)$  и называются *переходными вероятностями*. Имеют место соотношения

$$P_{ij}(t+s) = \sum_k P_{ik}(t) P_{kj}(s)$$

(уравнения Колмогорова — Чепмена).

При соблюдении некоторых условий переходные вероятности М. п. удовлетворяют конечной или бесконечной системе линейных однородных дифференциальных уравнений.

Частным случаем М. п. являются *Маркова цепи*: в этом случае время предполагается дискретным.

Теория М. п. имеет началом исследования А. А. Маркова (старшего). В 1930 г. А. Н. Колмогоровым была построена строгая математическая теория М. п.

Развитие теории М. п. во многом связано с прикладными задачами физики (описание распада радиоактивного вещества, задачи диффузии и др.).

**МАРКОВА ЦЕПИ** часто называют также *марковскими цепями*. М. ц. называется последовательность случайных испытаний, обладающая тем свойством, что вероятности результатов последующего испытания зависят лишь от результата непосредственно предшествующего испытания. Одним из простых примеров М. ц. является *случайное блуждание по целочисленным точкам прямой*, рассматриваемое в целые моменты времени. Это блуждание определяется так: если в момент  $t = n$  частица находится в некоторой точке прямой (рис. 3) с абсциссой  $m$ , то в момент  $t = n + 1$  частица будет в точке  $m + 1$  с вероятностью  $p$  и в точке  $m - 1$  с вероятностью  $q$ , причем  $p + q = 1$ . М. ц. впервые получены А. А. Марковым, доказавшим ряд их важных свойств.

Более подробным и полным является следующее описание М. ц. Пусть имеется конечное множество состояний системы  $S\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  и упорядоченная последовательность моментов времени  $T\{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots\}$ . Известно, что в каждый момент времени  $t_j \in T$  система находится в одном и только одном из состояний  $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ . Вероятность  $p_{ij}$  перехода системы из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  за один шаг (т. е. за промежуток времени  $(t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots$ ) задана и зависит только от  $i, j$ . Совокупность этих условий и составляет М. ц.

М. ц. может быть охарактеризована матрицей  $P = ((p_{ij}))$  — переходных одношаговых вероятностей. При этом имеют место следующие свойства:

$$\sum_j p_{ij} = 1, \quad \sum_i p_{ij} = 1, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1.$$

Вероятности перехода из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  за  $k$  шагов  $p_{ij}^{(k)}$  определяются формулой

$$P^{(k)} = ((p_{ij}^{(k)})) = P^k.$$

Здесь  $P^{(k)}$  — матрица вероятностей  $p_{ij}^{(k)}$ ,  $P^k$  —  $k$ -я степень матрицы  $P$ .

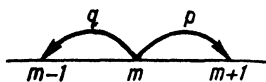


Рис. 3

При соблюдении некоторых условий существует матрица  $P^{(\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k$ , описывающая предельные переходные вероятности.

Лит.: [26, 83].

**МАСКЕРОНИ ПОСТРОЕНИЯ** — геометрические построения, выполняемые с помощью только одного циркуля. М. п. названы по имени итальянского математика Лоренцо Маскерони, изучавшего эти построения. Однако более чем за 100 лет до Маскерони такие построения были изучены датским математиком Г. Мором. Поэтому М. п. правильнее было бы называть построениями Мора — Маскерони.

Теоретическое обоснование М. п. дал австрийский математик А. Адлер, который в 1890 г. доказал, что всякая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой, может быть разрешима с помощью только одного циркуля. Так, пользуясь только одним циркулем, можно удвоить данный отрезок  $AB$ , а также разделить его пополам и решить другие задачи на построение.

См. также: *Геометрические построения, Штейнера построения, Мора — Маскерони построения, Линейка, Геометрия.*

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ** — см. *Индукция математическая.*

**МАТЕМАТИКА** — наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Так определял эту науку Ф. Энгельс. Однако в М. играют роль не только понятия числа и формы фигуры, но и многие другие понятия: множество, отображение, алгоритм, дедукция, декартово произведение двух множеств и др.

М., зародившаяся из практических вопросов человечества, из различных сфер его деятельности, в настоящее время приобрела весьма абстрактный характер, проникая во многие другие науки.

Николай Бурбаки (коллективное имя группы французских математиков) определяет современную математику как науку о *структурах*; при этом выделяются три типа основных (порождающих) структур: алгебраические структуры (кольца, группы, поля и др.), структуры порядка и структуры топологические. Научные исследования по М. у нас в стране в основном ведутся в математических институтах АН СССР, АН союзных республик и во многих наших университетах. В СССР издается множество математических журналов.

Греч. *μαθηματική* от *μαθημα* — знание, наука.

См. также: *Аналитическая геометрия, Алгебра, Анализ математический, Геометрия, Графов теория, Дискретная математика, Топология, Математическая статистика, Теория вероятностей.*

Лит.: [12].

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА** — математическая дисциплина, разрабатывающая формальный аппарат для описания строения естественных и некоторых искусственных языков. М. л. возникла в 50-х годах XX в., используя аппарат *алгебры, алгоритмов теории и автоматов теории.*

Лит.: [27].

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА** — раздел математики, в котором математический аппарат и специально разработанный аппарат символов с помощью различных исчислений (формализованных языков) применяется к изучению

мышления, в частности к изучению правил вывода. М. л. возникла в конце XIX — начале XX в. Одним из первых результативных применений М. л. была *теория множеств*, уточнение понятий *алгоритма*, доказательство неразрешимости ряда алгоритмических проблем.

Лит.: [59].

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА** — раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и исследования статистических данных для научных и практических выводов.

М. с. изучает множество объектов, называемых статистическими совокупностями. При этом статистическая совокупность разбивается на группы объектов, каждая из которых состоит из объектов с данным характеристическим свойством (признаком). Вычисляется количество объектов в группе, изучается распределение количественных признаков по группам. Одной из центральных задач М. с. является описание этого распределения (или его характеристик) для большой статистической совокупности (генеральной совокупности) по распределению малой статистической совокупности (выборки), случайно отобранной из генеральной совокупности (см. *Выборочный метод*).

Теоретической основой М. с. является *теория вероятностей*. Связь между М. с. и теорией вероятностей в большой степени основана на *законах больших чисел*. Так, основное понятие теории вероятностей — вероятность случайного события  $A$  может быть с большой степенью точности и надежности вычислена чисто статистическими методами:  $p(A) \cong \frac{m}{n}$ , где  $n$  — количество независимых

испытаний, в которых событие  $A$  может наступить, а  $m$  — количество наступлений события  $A$  в серии из  $n$  испытаний,  $n$  велико (см. *Бернулли закон*).

Иногда из общих соображений бывает заранее известен вид распределения изучаемой генеральной совокупности. Например, при соблюдении некоторых весьма общих условий, формулируемых в центральной предельной теореме, можно считать, что генеральная совокупность распределена нормально (см. *Нормальное распределение*).

В этих случаях актуальны задачи о нахождении параметров распределения по выборочным данным.

Большое место в М. с. занимает задача об изучении распределения генеральной совокупности, а также следующий частный случай.

Пусть генеральная совокупность распределена по некоторому закону  $g$ , нам неизвестному. При этом есть основания предполагать, что генеральная совокупность распределена по некоторому закону  $f$ . Возьмем выборку из этой генеральной совокупности и поставим вопрос о вероятности того, что выборочные данные противоречат нашей гипотезе (состоящей в том, что генеральная совокупность распределена по закону  $f$ ).

Такие задачи решаются с помощью так называемых критериев согласия (гипотезы с выборочными данными). Наиболее известными из критериев согласия являются  $\chi^2$ -критерий Пирсона, критерий Колмогорова и др.

Методы М. с. позволяют в известной степени оценить зависимость случайных величин по выборочным данным (Корреляционный анализ), построить функциональную зависимость, приближающую данную корреляционную зависимость между случайными величинами (факторами) (Регрессионный анализ, см. *Метод*

*наименьших квадратов*), выделить среди случайных ошибок наблюдений так называемые систематические (Дисперсионный анализ).

Эксперименты в различных науках — физике, химии, биологии, медицине и др. — обладают тем общим свойством, что на их результат влияют не только факторы, регулируемые экспериментом, но еще и огромное множество случайных факторов. Результат эксперимента, следовательно, обычно является случайной величиной. Задача ученого — увидеть за случайными колебаниями действие причинного закона. Применяемые при этом приемы могут быть общими для различных наук. Эти приемы и изучаются М. с.

Пусть, например, результат эксперимента  $A$  есть случайная величина  $\xi$ , результат эксперимента  $B$  есть случайная величина  $\eta$  (скажем,  $\xi$  есть урожай при применении агротехнического комплекса  $A$ ,  $\eta$  — урожай при применении комплекса  $B$ ). Мы хотим выяснить, можно ли считать, что  $M\xi = M\eta$ , где  $M$  — знак математического ожидания, т. е. что комплексы  $A$  и  $B$  в среднем обеспечивают одинаковую урожайность. Для этого нужно проверить гипотезу  $M(\xi - \eta) = 0$ .

В последние годы развивается общая теория статистических решений, тесно связанная с так называемой теорией игр. Эта теория рассматривает следующую общую задачу. Предположим, что результат опыта зависит от неизвестного для статистика состояния изучаемой системы  $\omega$ . Статистик наблюдает результаты опытов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и принимает по ним решение  $a$ . Если система находится в состоянии  $\omega$ , а статистик принял решение  $a$ , то он несет потери  $L(\omega, a)$  (выраженные, скажем, в деньгах). Например, пусть мы изучаем работу какого-нибудь автомата, производящего детали заданного размера. Система имеет два состояния:  $\omega_1$  — автомат налажен правильно и  $\omega_2$  — произошла разладка деталей. Решений можно принять тоже два:  $a_1$  — продолжать производство,  $a_2$  — остановить автомат для наладки. Функция потерь дается равенствами:  $L(\omega_1, a_1) = 0$ ,  $L(\omega_2, a_2) = 0$ , а  $L(\omega_2, a_1)$  — стоимость брака,  $L(\omega_1, a_2)$  — стоимость лишней наладки. Ставится задача, как должен действовать статистик, чтобы математическое ожидание потерь было минимальным.

Дальнейшее обобщение этой теории — теория последовательных статистических решений, в которой учитывается стоимость повторения эксперимента, Лит.: [26, 32, 43, 80].

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗНАКИ** — см. *Знаки математические*. Символы, используемые для различных целей, например для обозначения множеств, краткой записи формул, теорем и т. д. При обозначении множеств в литературе можно встретить двойное обозначение: множество всех натуральных чисел  $N$  и  $\mathbb{N}$ , множество всех целых чисел  $Z$  и  $\mathbb{Z}$ , множество всех рациональных чисел  $Q$  и  $\mathbb{Q}$ ...

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ** — ежегодные соревнования по математике среди учащихся школ в рамках района, области или города, республики или всего Советского Союза. С 1959 г. по инициативе румынской и нашей математической общественности и органов просвещения была проведена I Международная М. о., в которой приняли участие делегации Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР и Чехословакии.



В состав команд на Международные М. о, как правило, входят победители национальных М. о. Участники Международных М. о. по ходатайству Минпроса СССР поступают на математические факультеты университетов без вступительных экзаменов. М. о. играют большую роль в математической пропаганде, подготовке школьников и развитии их интереса к математике.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ** (физико-математические) — школы, имеющие более расширенную и углубленную программу по математике (по математике и физике). Набор в М. ш. производится или с IV, или с VIII класса. Преподавателями М. ш. являются наиболее опытные преподаватели математики и физики, или аспиранты-математики, аспиранты-физики, или научные сотрудники, имеющие ученую степень, доценты.

Учащиеся М. ш. принимают активное участие в различных *Математических олимпиадах*. По окончании М. ш. многие поступают в институты и университеты на факультеты, готовящие высококвалифицированных специалистов по математике и физике.

Близкими к М. ш. являются специализированные физико-математические школы, организованные при крупных университетах; это школы-интернаты. Такие школы созданы при Московском, Ленинградском, Киевском, Новосибирском и др. университетах. Учащиеся М. ш.-интернатов являются активными участниками математических олимпиад и их победителями. Преподаватели университетов ведут занятия с учащимися в школах-интернатах.

По инициативе ученых МГУ в 1963/64 уч. г. была организована Заочная математическая школа (ЗМШ), призванная обучать ребят, живущих в сельской местности и небольших городах. Затем эта инициатива создания ЗМШ при МГУ получила широкое распространение и была подхвачена другими университетами (Ленинградским, Новосибирским и др.). ЗМШ сыграли определенную положительную роль в выявлении молодых талантов и в воспитании у ребят интереса к математике.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ** — одна из важнейших числовых характеристик случайной величины. Для дискретной случайной величины  $X$ , заданной значениями  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и соответствующими этим значениям вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , М. о. (обозначаемое  $MX$ ) определено формулой

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Для непрерывной случайной величины  $X$ , заданной дифференциальной функцией распределения  $f(t)$ , М. о. по определению равно:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt.$$

М. о. характеризует случайную величину  $X$  следующим образом. Пусть проведено  $m$  независимых испытаний величины  $X$  и  $x_1, x_2, \dots, x_m$  — полученные в результате этого числа. При этом оказывается, что при больших  $m$  с высокой вероятностью числа  $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}$  и  $MX$  мало отличаются. Иными словами, среднее арифметическое большого количества наблюдаемых значений случайной величины  $X$  приблизительно равно  $MX$ .

Свойства М. о.: 1.  $M(X + Y) = MX + MY$  для произвольных случайных величин  $X, Y$  — зависимых или независимых. 2.  $M(CX) = CMX$  для любого постоянного  $C$ . 3.  $M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$  для независимых случайных величин  $X, Y$ .



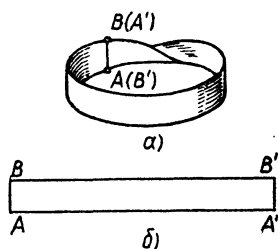


Рис. 4

расслоения — гомеоморфна окружности, при этом  $B$  можно считать вложенной в  $E$  так, что образом вложения является линия  $CC'$ , свернутая в окружность.

Слоем  $F$  расслоения над точкой  $x \in B$  является множество точек отрезка, перпендикулярного линии  $CC'$  и проходящего через  $x \in B$ . Проекция  $p: F \rightarrow B$  переводит каждый слой в соответствующую ему точку базы.

М. л., т. е. пространство  $E$ , можно покрыть двумя окрестностями  $U, V$ , гомеоморфными евклидову квадрату. Их пересечение  $W = U \cap V$  состоит из двух частей:  $W = A_1 \cup A_2$ . При этом отображение  $g: W \rightarrow G$ , где  $G = \mathbb{Z}_2$  (циклическая группа второго порядка) устроено так:  $A_1$  отображается в единицу группы  $G = \mathbb{Z}$ ,  $A_2$  — в единственный нетривиальный элемент  $\delta$  группы  $G = \mathbb{Z}_2$ . При этом  $\delta$  действует на слой (отрезок) как симметрия относительно середины. Отображение  $G$  «склеивает» прямое произведение  $U \times F$  с прямым произведением  $V \times F$  послойно в соответствии с действием  $G$  на слой над  $W = U \cap V$ .

Лит.: [6, 33].

**МЁБИУСА ФУНКЦИЯ** — функция  $\mu(n)$ , определенная для целых положительных значений аргумента  $n$ ; М. ф. равна 1, если  $n = 1$ ; равна 0, если  $n$  делится на квадрат какого-либо простого числа  $p$ , и, наконец, равна  $(-1)^k$ , если  $n = p_1 p_2 \dots p_k$ , где  $p_1, p_2, \dots, p_k$  — различные простые числа. М. ф. является мультипликативной функцией. Используется в различных теоретико-числовых вопросах. М. ф. получила название по имени немецкого математика Мёбиуса (Möbius), введшего ее в математику.

**МЕДИАНА: 1°. М. треугольника** — отрезок (или его длина) прямой от вершины треугольника до середины противоположной стороны. М., выходящая из вершины  $A$  треугольника, обозначается  $m_A$  или  $t_A$ . М. треугольника делит его на две равновеликие части. М., проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является также его высотой и биссектрисой. Три М. треугольника пересекаются всегда во внутренней точке его. Точка пересечения М. треугольника (двумерного, или треугольной однородной пластинки) является центром его тяжести, или *центроидом*. Центроид треугольника делит каждую М. на части, отношение длин которых равно 2 : 1, считая длину первого отрезка от вершины. Зная три медианы треугольника, можно циркулем и линейкой построить сам треугольник.

М. равнобедренного треугольника лежит на оси симметрии его.

См. также: *Замечательные точки* в треугольнике.

**2°. М. тетраэдра** (треугольной пирамиды) — отрезок (или его длина), соединяющий вершину с центроидом противоположной грани. Четыре М. тетраэдра пересекаются в одной точке, делящей каждую М. в отношении 3 : 1, считая длину первого отрезка от вершины тетраэдра.

**3°. М. непрерывной случайной величины  $X$**  — число  $MeX$  такое, что  $P\{X < MeX\} = P\{X > MeX\} = \frac{1}{2}$ . Другими словами, М.  $MeX$  обладает тем свойством, что вероятности событий  $X < MeX$  и  $X > MeX$  одинаковы и равны половине.

Лат. medianus — средний.

**МЕДИАТРИСА ОТРЕЗКА** — прямая, перпендикулярная к этому отрезку и проходящая через его середину. М. отрезка может быть определена как множество точек плоскости, равноудаленных от концов отрезка, принадлежащего плоскости, т. е. М. отрезка есть серединный перпендикуляр к этому отрезку.

М. отрезка называют также симметралью отрезка (или симметралью концов отрезка). М. отрезка является одной из двух осей симметрии этого отрезка.

**МЕЖДУ ЛЕЖАТЬ** (лежать между) — тернарное отношение для трех различных точек евклидовой прямой. В аксиоматике Д. Гильберта понятие «М. л.» относится к основным, неопределяемым отношениям для трех точек прямой. В аксиоматике элементарной геометрии, предложенной акад. Колмогоровым А. Н., понятие «М. л.» определяется через основное понятие «расстояние»: точка  $X$  лежит между точками  $A$  и  $B$ , если эти три точки различны и  $|AX| + |XB| = |AB|$ .

Понятие «лежать между» позволяет, исходя из теоретико-множественного подхода к элементарной геометрии, более четко и строго определить понятие отрезка, луча. Если три точки прямой различны, то для них справедливо утверждение о том, что только одна лежит между двумя другими. Доказывается также, что если три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  не принадлежат одной прямой, то  $|AC| < |AB| + |BC|$  (это следует из свойств расстояний).

Понятие «М. л.» используется не только в геометрии, но иногда и в курсе алгебры при решении уравнений и неравенств, содержащих модуль числа. Например, решением уравнения  $|x - 2| + |x + 3| = 5$  является числовой отрезок  $-3 \leq x \leq 2$ , что легко иллюстрируется на числовой оси.

Понятие «М. л.» для трех точек проективной прямой (прямой, лежащей на проективной плоскости) неприменимо, поскольку проективная прямая носит замкнутый характер, и вместо отношения «М. л.» в проективной плоскости рассматривается разделенность и неразделенность двух пар точек, что в конечном счете сводится к понятию сложного отношения четырех точек прямой.

Лит.: [23], [33].

**МЕНЕЛАЯ ТЕОРЕМА** — следующая теорема: если прямая пересекает стороны треугольника  $ABC$  или их продолжение в точках  $C'$ ,  $A'$  и  $B'$  (рис. 5), то справедливо соотношение

$$\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = -1. \quad (*)$$

Отношение сонаправленных векторов берется положительным, отношение противонаправленных векторов берется отрицательным числом (в этом случае прямая пересекает продолжение стороны треугольника). Верно и обратное утверждение: если выполняется равенство (\*), где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — вершины треугольника, а  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  — точки, принадлежащие сторонам треугольника или их продолжениям, то точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  лежат на одной прямой. М. т. можно сформулировать в виде критерия расположения трех точек  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  на одной прямой: для того чтобы три точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение (\*), где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — вершины треугольника, а точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  принадлежат соответственно прямым  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$ .

М. т. была доказана древнегреческим ученым Менелаем (I в.) для сфериче-

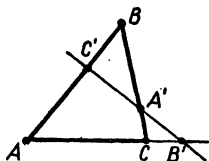


Рис. 5

ского треугольника и, по всей вероятности, была известна Евклиду (III в. до н. э.). М. т. является частным случаем более общей теоремы Карно.

См. также: *Чевы теорема*, *Карно теорема*.

**МЕНЬЕ ТЕОРЕМА** — теорема дифференциальной геометрии, устанавливающая зависимость между кривизной  $\frac{1}{\rho}$  плоского сечения  $\pi$  поверхности в точке  $M$  и

кривизной  $\frac{1}{R}$  нормального сечения поверхности в той

же точке  $M$ , если сечения имеют общую касательную в точке  $M$ . Именно имеет место формула

$$\frac{1}{\rho} \cos \Theta = \frac{1}{R}, \quad (*)$$

где  $\Theta$  — угол между плоскостью сечения  $\pi$  поверхности и нормалью  $MN$  к поверхности. Формула (\*) и есть аналитическая запись М. т., которая была установлена французским математиком Ж. Менье в 1776 г., а опубликована в 1785 г.

Лит.: [61, 71].

**МЕРА МНОЖЕСТВА** — неотрицательная аддитивная функция  $\mu(E)$  множества  $E$  евклидова пространства:  $\mu(E) \geq 0$  и  $\mu(E_1) + \mu(E_2) = \mu(E_1 \cup E_2)$ , если  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Единственной М. м., обладающей свойством счетной аддитивности, т. е.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \text{ при } E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j,$$

и такой, что мера отрезка на прямой равна его длине, является мера множества Лебега. Те множества, для которых можно определить меру Лебега, называются измеримыми. Пример неизмеримого множества строится довольно сложно с использованием аксиомы Цермело (см. *Цермело аксиома*). М. м. — важное понятие

дескриптивной теории множеств, теории функций, теории вероятностей.

Лит.: [46].

**МЕРАНСКАЯ ПРОГРАММА** — проект программы по математике для германской общеобразовательной средней школы, составленный специальной комиссией общества естествоиспытателей и врачей и обсуждавшийся на съезде этого общества в г. Меране (1905).

М. п. выражала идеи «реформистского» движения в преподавании математики в средней школе; инициатором этой реформы был известный немецкий математик Ф. Клейн. М. п. отводила центральное место при изучении математики понятию функции, которое имеет большое приложение в естествознании и технике. При этом в М. п. требовалось на первых ступенях изучения математики не давать учащимся строгого логического обоснования понятий и выводов (доказательств), а больше прибегать к наглядным пособиям, графикам и примерам из жизни. М. п. включала в себя элементы высшей математики (производная, дифференциал, интеграл) и их приложения. М. п. повлияла на преподавание математики в ряде стран: во Франции, России (в кадетских корпусах элементы

математического анализа были введены еще в середине XIX в. по инициативе М. В. Остроградского, а требования о введении в среднюю школу идеи функциональной зависимости были сформулированы В. П. Шереметьевским задолго до М. п.).

См. также: *Эрлангенская программа*.

Лит.: [38].

**МЕРОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ** — однозначная аналитическая в плоскости комплексного переменного  $z$  функция  $w(z)$ , все особые точки которой, отличные от  $z = \infty$ , являются полюсами. М. ф. представляется в виде  $w(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ , где  $f(z)$  и  $g(z)$  — целые функции. К М. ф. относятся многие важные классы функций (см. *Аналитические функции*).

Греч. *μερος* — часть (здесь: дробь) и *морфос* — форма, вид.

Лит.: [56].

**МЕРСЕННА ЧИСЛА** — числа вида  $M_n = 2^n - 1$ , где  $n$  — натуральное число. М. ч. иначе можно определить как натуральные числа, которые в двоичной системе счисления записываются только одними единицами (без нулей). Действительно, М. ч.  $M_n = 2^n - 1$  в двоичной системе запишутся в следующем виде:

$$M_n = 2^n - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 = 111 \dots 1 \text{ (} n \text{ раз 1)}.$$

Можно определить М. ч. и как сумму  $n$  первых членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и со знаменателем 2.

С помощью М. ч. в разное время находили самые большие из известных простых чисел, а также большинство из известных *совершенных чисел*. Легко видеть, что при любом составном  $n$  М. ч. являются также составным. Отсюда следует, что М. ч. могут быть простыми только тогда, когда  $n$  — простое число. Известно пока 20 простых М. ч., которые получены при следующих простых индексах:  $n = p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253$  и 4423. Восемь наибольших из этих М. ч. найдены с использованием электронных вычислительных машин (ЭВМ).

Так, например, чтобы установить, что число  $2^{3217} - 1$  (состоящее из 969 цифр) является простым, понадобилось произвести несколько тысяч возведений чисел в квадрат, а затем делений на  $2^{3217} - 1$  таких чисел, которые состояли из более чем 696 знаков (цифр). Все такие вычисления в 1957 г. заняли 5,5 часа работы шведской ЭВМ. Или, например, чтобы установить, что число  $2^{3191} - 1$  (состоящее из 2466 цифр) является составным, понадобилось 100 часов работы ЭВМ, однако до сих пор ни один из его делителей не найден.

Не-найдено ни одного делителя и для других гораздо меньших М. ч., хотя сравнительно давно известно, что они являются составными и даже известны сами числа. Таковы, например, числа:  $2^{101} - 1$ , состоящее из 31 цифры, и  $2^{257} - 1$ , состоящее из 77 цифр.

Известно, что все четные *совершенные числа* имеют вид  $2^{p-1}(2^p - 1)$ , где  $p$  и  $2^p - 1$  — простые числа (Эйлер, XVIII в.). Отсюда следует, что каждое новое простое М. ч. одновременно открывает и новое четное совершенное число. М. ч. названы именем французского математика М. Мерсенна (1588—1648).

Лит.: [75].

**МЕТОД ГРАНИЦ** в приближенных вычислениях — метод оценки выражения по его нижней и верхней границам, т. е. метод оценки выражения, взятого один раз с недостатком, а второй раз с избытком.

**П р и м е р ы.** 1. Пусть  $3 < x < 7$  и  $2 < y < 5$ . Оценим М. г. значения выражений: а)  $x + y$ ; б)  $x - y$ ; в)  $x - y$ ; г)  $x/y$ . Это будут:  $5 < x + y < 12$ ;  $6 < xy < 35$ ;  $-2 < x - y < 5$ ;  $3/5 < x/y < 7/2$ .

2. Аналогично М. г. мы находим приближенное значение выражения (суммы двух иррациональных чисел  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{3}$ ):  $1,4 + 1,7 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 1,5 + 1,8$ , т. е.  $3,1 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,3$ ; затем можно приближения корней взять с точностью до  $1/100$  с недостатком и избытком и сложить эти значения, получим оценку суммы данных корней (чисел) с точностью до сотых долей и т. д.

См. также: *Ложного положения правило*.

Лит.: [10, 95].

**МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ** — метод решения следующей задачи: в евклидовом пространстве  $E^{n+1}$ , точки которого обозначаются  $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ , задано множество  $T$  из  $N$  точек  $(x_1^i, x_2^i, x_3^i, \dots, x_n^i, y^i)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ . Рассматривается класс  $S$  функций  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  — параметры, выделяющие конкретную функцию из класса  $S$ . Требуется найти такую функцию  $f \in S$ , чтобы ее значения в точках  $(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$  отклонялись от соответствующих  $y^i$  «как можно меньше». Точный смысл последнего требования таков: найти значения параметров  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_k^0$  такие, чтобы функция

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \sum_{i=1}^N [f(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, \lambda_1, \dots, \lambda_k) - y^i]^2$$

имела в точке  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_k^0$  минимум.

График функции  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_k^0)$  будет при этом в известном смысле наилучшим образом приближать систему точек  $T$ .

Указанная задача, естественно, возникает при вычислении функции, описывающей какое-либо явление, по наблюдаемым значениям точки множества  $T$  и при том (заранее известном) условии, что искомая функция принадлежит классу  $S$ . (Наблюдаемые значения при этом рассматриваются как возмущенные истинные значения, характеризующие данное явление.)

Простейшей задачей, решаемой по М. н. к., является следующая: на плоскости дано множество  $T$  из  $N$  точек:  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Требуется вычислить линейную функцию  $y = kx + b$  (т. е. найти  $k$  и  $b$ ) так, чтобы функция

$$R(k, b) = \sum_{i=1}^N (kx_i + b - y_i)^2$$

достигала в точке  $(k, b)$  своего минимума.

Решение этой задачи существует, единственно и описывается формулами:

$$k = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}, \quad b = \bar{y} - k\bar{x}. \quad (*)$$

При этом искомая прямая имеет уравнение

$$y - \bar{y} = k(x - \bar{x}).$$

В написанных формулах  $\overline{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{N}$ ,  $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{N}$ ,  
 $\overline{y} = \frac{\sum y_i}{N}$ ,  $\overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2}{N}$ . (\*\*)

Прямая, являющаяся решением задачи, называется прямой регрессии (игрека на икс). Говорят также о регрессии икса на игрек. Под этим понимают рассмотренную выше задачу с той только разницей, что вычисляют прямую с уравнением вида  $x = ky + b$ . Решение этой задачи описывается формулами (\*), (\*\*), в которых  $x$  и  $y$  следует поменять местами.

Другой важной в приложениях задачей является такая: в  $n + 1$ -мерном евклидовом пространстве задано множество  $T$  из  $N$  точек:  $(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, y^i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Требуется найти уравнение гиперплоскости  $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + a_0$  (т. е. найти  $a_0, a_1, \dots, a_n$ ) такое, что функция

$$R(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^N (y^i - a_0 - a_1 x_1^i - a_2 x_2^i - \dots - a_n x_n^i)^2$$

имела минимум в точке  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ .

Оказывается, что искомые числа  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  удовлетворяют следующей системе линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} a_j = b_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

где  $A_{jk} = \sum_{i=1}^N x_j^i x_k^i$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, n$ ,  $A_{0j} = A_{j0} = \sum_{i=1}^N x_j^i$ ,  $A_{00} = N$ ,

$$b_j = \sum_{i=1}^N y^i x_j^i, \quad j = 0; \quad b_0 = \sum_{i=1}^N y^i.$$

Задача о нахождении функции вида  $y = \sum_{k=0}^m a_k x^k$  по заданному множеству  $T$  точек  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  также может быть решена М. н. к. Искомые коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_m$  удовлетворяют, как можно доказать, следующей системе линейных уравнений:

$$\sum A_{ij} a_j = b_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

где  $A_{ij} = \frac{\sum x_i^{i+j}}{N}$ ,  $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $b_j = \frac{\sum x^j y}{N}$ .

Следует заметить, что если класс функций  $S$ , среди элементов которого требуется определить наилучший многочлен, состоит из всех многочленов степени меньшей или равной  $N - 1$ , то решением задачи является функция, график которой проходит через все заданные точки множества  $T$ . Однако такая постановка задачи зачастую лишена практического смысла.

М. н. к. применяется для нахождения одной или нескольких величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки. М. н. к. используется также для приближенного представления заданной функции другими (более простыми функциями). Пусть для разыскания значения неизвестной величины  $x$  произведено  $n$  независимых измерений, давших значения  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , т. е.  $y_i = x + \delta_i$ , где случайные ошибки  $\delta_i$  являются независимыми случайными



величинами с математическим ожиданием  $M\delta_i = 0$  и дисперсией  $D\delta_i = \sigma_i^2$ . Согласно М. н. к. в качестве величины  $x$  берут такое  $X$ , для которого будет наименьшей сумма квадратов:  $S(x) = \sum p_i (y_i - X)^2$ .

Здесь  $p_i = K/\sigma_i^2$ . Коэффициент  $K > 0$  можно выбрать произвольно. Для того чтобы сумма  $S$  была наименьшей, необходимо в качестве  $X$  выбрать

$$X = \frac{\sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sum p_i},$$

так в простейшем случае применяется М. н. к.

Этот способ применяется и для приближения функций. Пусть, например, функция  $y = f(x)$  задана таблицей значений  $x_i, y_i, i = 1, 2, \dots, n$  и пусть задано некоторое семейство функций  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ . Требуется так приблизить функцию  $y = f(x)$  функцией вида

$$g(x) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x),$$

чтобы сумма квадратов  $S = \sum p_i [y_i - g(x_i)]^2$  была наименьшей. Задача приближения функций по М. н. к. была изучена П. Л. Чебышевым.

Лит.: [17].

**МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК** — метод решения волнового уравнения, предложенный французским математиком Ж. Даламбером. В простейшем случае, связанном с описанием колебания бесконечной струны по известному начальному положению струны, М. х. состоит в следующем. Пусть  $u(x, t)$  — отклонение струны в точке  $x$  в момент времени  $t$ ; известно, что  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  (см. *Струны уравнение*) и  $u(x, 0) = \varphi(x), u'(x, 0) = \psi(x)$ . Всякая функция  $u(x, t)$ , удовлетворяющая указанному выше уравнению, имеет вид:  $u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at)$ , где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные функции одного переменного (дважды дифференцируемые). При этом  $f_1$  и  $f_2$  могут быть выбраны так, чтобы  $u(x, t)$  удовлетворяли начальным условиям, что дает:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \varphi(x + at) + \varphi(x - at) \right] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx.$$

Слагаемые  $f_1(x - at)$  и  $f_2(x + at)$  определяют волны прямую и обратную. (График функции  $f_1(x - at)$  является кривой  $y = f_1(x)$ , сдвинутой на  $at$ , аналогичным образом график  $f_2(x + at)$  получается из графика  $y = f_2(x)$  сдвигом на  $-at$ .)

М. х. применяют и для струны с закрепленным концом, и в более общей ситуации. М. х. позволяет просто и удобно объяснить явление отражения волн и другие явления. Кроме того, М. х. имеет преимущества наглядности.

Прямые с уравнениями  $x + at = c_1, x - at = c_2$ , где  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные, являются характеристиками уравнения колебания струны, что объясняет название М. х. Другое название М. х. — метод Даламбера.

Лит.: [82].

**МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ** — наука, возникшая на стыке педагогики (точнее, дидактики), психологии и математики. М. п. м. изучает методы, приемы и закономерности обучения математике в различных учебных заведениях.

Лит.: [11, 40, 44, 77, 78, 80, 89, 97, 96, 65].

**МЕТРИКА** — функция  $\rho$  двух точек (элементов)  $x, y$ , пробегающих независимо друг от друга некоторое множество  $D$ , задающая «расстояние» между точками  $x, y$ . М. обобщает понятие расстояния между точками евклидова пространства в том смысле, что, как и в евклидовом случае, имеют место (по определению) следующие свойства:

- 1)  $\rho(x, y) \geq 0$ ;                      2)  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- 3)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;            4)  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ .

Последнее свойство функции  $\rho$  называют неравенством треугольника.

Множество  $D$  вместе с М. на нем называется метрическим пространством.

М., заданная на множестве  $D$ , определяет в этом множестве топологию. В частности, можно рассматривать предел последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  точек из  $D$ , понимая под этим такую точку  $x$ , что  $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$  (разумеется, если такая точка существует). В этом случае пишут:  $\lim x_n = x$ . Понятие предела

последовательности точек делает возможным рассмотрение непрерывных в  $D$  функций:  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , если для всякой последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \rightarrow x_0$ , последовательность  $f(x_1) \rightarrow f(x_0)$ .

П р и м е р ы. 1. Евклидова М. в  $n$ -мерном евклидовом пространстве.

2. М. в пространстве всех непрерывных на  $[0; 1]$  функций  $f$ , определенная формулой  $\rho(f, g) = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx$ .

Лит.: [4; 90].

**МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО** — множество  $D$ , на котором определена метрика — функция  $\rho$ , с областью определения  $D \times D$  и множеством значений, принадлежащим множеству неотрицательных действительных чисел. По определению функция  $\rho$  удовлетворяет свойствам:

- 1)  $\rho(x, y) \geq 0$ ;                      2)  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- 3)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;            4)  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ .

М. п. является обобщением понятия евклидова пространства, поскольку метрика сохраняет известные свойства евклидова расстояния, выраженные утверждениями 1)–4).

В М. п. естественным образом могут быть внесены понятия предела последовательности точек М. п. и непрерывной функции. (Об этом см. подробнее в статье *Метрика*.)

Последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  точек из М. п.  $D$  называется фундаментальной, если для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $N$ , что при всех  $k, l > N$ ,  $\rho(x_k, x_l) < \varepsilon$ . Смысл этого определения в грубых чертах состоит в том, что все точки фундаментальной последовательности, номера которых велики, находятся на небольшом расстоянии друг от друга.

$M$ . п.  $D$  называется полным, если всякая фундаментальная последовательность в нем имеет предел (точку, принадлежащую  $D$ ). Если  $M$ . п.  $D$  неполно, то его стандартным приемом можно превратить в полное  $M$ . п., добавив к  $D$  некоторые новые точки.

$M$ . п.  $D$  можно рассматривать как топологическое пространство, если ввести в  $D$  топологию следующим образом. Окрестностью (шаровой) каждой точки  $x \in D$  назовем множество всех  $y \in D$  таких, что  $\rho(x, y) < a$ ,  $a > 0$ . Система всех таких окрестностей, т. е. множеств указанного вида при любых  $x \in D$  и  $a > 0$ , задает в  $D$  структуру топологического пространства.

Понятие  $M$ . п. было введено М. Фреше в 1906 г.

**П р и м е р ы.** 1. Множество вещественных непрерывных функций  $f$  на отрезке  $[0; 1]$  вместе с метрикой  $\rho(f, g) = \max |f - g|$  является  $M$ . п.

2. Множество  $Q$  рациональных чисел есть  $M$ . п. относительно метрики  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

Лит.: [4, 94].

**МЕЦНЕВО ЧИСЛО** — приближенное значение числа  $\pi$  с точностью до  $10^{-7}$ , которое было найдено из приближенного представления числа  $\pi$ :  $\pi \approx 355/113$ . Приближенное значение числа  $\pi$  до  $10^{-6}$  было известно еще в Китае в V в.

$M$ . ч. названо по имени голландского математика А. Меция (1543—1620), вычислившего число  $\pi$  с точностью до  $10^{-7}$ ; правильная фамилия Меция — Антониец (Андриан Антониец), но он был уроженец г. Меца, поэтому его и называли Мецием. (Сравните происхождение названия *Региомонтана формулы*.) Дробь  $355/113$  есть одна из *подходящих дробей* разложения числа  $\pi$  в *непрерывную дробь*. Иногда необоснованно число  $\pi$  называют  $M$ . ч.

См. также: *Лудольфово число*, *пи* — Число.

**МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР** — электронная вычислительная машина небольших размеров.  $M$ . прост в обращении, обладает высокой надежностью вычислений до 8-го разряда. Малые габариты  $M$ . позволяют легко размещать его в кармане. Существуют  $M$ . отечественного и зарубежного производства с различным набором операций над числами. Сравнительно невысокая цена  $M$ . и быстрота вычислений на нем дают возможность широко использовать его во многих расчетных, учебных и исследовательских работах.  $M$ . «Электроника БЗ-18М» — миниатюрный компьютер, выполняющий до 28 различных операций.

$M$ . облегчает работу, связанную с громоздкими и утомительными вычислениями, экономит время школьника, студента и любого работника творческого труда.

$M$ . называют также калькулятором, микрокомпьютером, миникомпьютером.

Лит.: [25, 28].

**МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ** — поверхности, у которых средняя кривизна в любой ее точке равна нулю (см. *Кривизна*).  $M$ . п. возникли при решении следующей вариационной задачи: среди всех поверхностей, проходящих через данную замкнутую пространственную кривую, найти ту, которая имеет минимальную площадь поверхности (отсюда происходит и название), ограниченной данной кривой. В случае плоской кривой решением будет часть плоскости, ограниченная данной замкнутой кривой. В случае же пространственной кривой

необходимым условием того, чтобы поверхность была М. п., является равенство нулю ее средней кривизны во всех ее точках; хотя это условие не является достаточным, однако поверхности, удовлетворяющие этому условию, стали называть М. п.

М. п. имеют во всех своих точках неположительную полную кривизну, т. е. являются седлообразными поверхностями. Бельгийский физик Плато предложил простой экспериментальный способ получения М. п. с помощью использования мыльных пленок, натянутых на проволочный каркас.

Лит.: [61, 71].

**МИНИМУМ ФУНКЦИИ** 1°. М. ф. одной переменной  $y = f(x)$  — значение  $f(x_0)$  функции, не превосходящее значений, принимаемых этой функцией при всех достаточно близких к  $x_0$  значениях аргумента (рис. 6). Формальное определение М. ф.: значение  $f(x_0)$  является М. ф.  $f(x)$ , если существует окрестность  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  такая, что для всех ее точек выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0). (*)$$

(Говорят, что функция  $f$  имеет минимум в точке  $x_0$ .)

2°. М. ф. нескольких переменных  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(P)$  — значение  $f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = f(P_0)$ , не превосходящее значений, принимаемых функцией во всех точках, достаточно близких к точке  $P_0$  (см. рис. 7, где  $n = 2$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ).

Формальное определение М. ф.  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(P)$ : функция  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(P)$  имеет минимум в точке  $P_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ , другими словами,  $f(P_0) = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  есть М. ф., если существует окрестность точки  $P_0$ , лежащая внутри области определения функции, такая, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство

$$f(P) \geq f(P_0). (**)$$

В случае выполнения в соотношениях (\*) и (\*\*) строгого неравенства говорят, что имеет место М. ф. в узком смысле, в противном случае — в широком смысле — М. ф. называют иногда абсолютным в отличие от относительного минимума. См. также Необходимые условия экстремума и Достаточные условия экстремума.

Лат. *minimum* — наименьшее.

См. также: Локальный экстремум.

**МИНКОВСКОГО НЕРАВЕНСТВО** — неравенство для  $p$ -х степеней чисел, имеющее вид:

$$\left\{ \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{k=1}^n |b_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

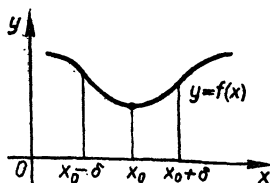


Рис. 6

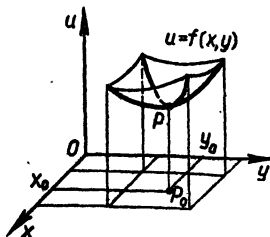


Рис. 7

где целое  $p > 1$ ,  $a_k$  и  $b_k$  — неотрицательные числа. М. н. является обобщением известного «неравенства треугольника», утверждающего, что длина одной стороны треугольника не больше суммы длин двух других его сторон; для  $n$ -мерного пространства в этом случае расстояние между точками  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  определяется числом

$$\rho(x, y) = \left\{ \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

М. н. было установлено немецким математиком Г. Минковским в 1896 г.

**МИНОР**  $k$ -го порядка определителя  $D$  (или матрицы  $A$ ) — определитель  $k$ -го порядка, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых  $k$  строк и  $k$  столбцов определителя  $D$  (или матрицы  $A$ ).

М. определителя  $n$ -го порядка (или квадратной матрицы  $n$ -го порядка), составленный из элементов, стоящих на пересечении  $k$  ( $k < n$ ) столбцов и  $k$  строк, и  $M_*$ , составленный из элементов, стоящих на пересечении остальных  $n - k$  столбцов и  $n - k$  строк, называются взаимно дополнительными М.

Из определения М. следует, что алгебраическое дополнение минора совпадает с его дополнительным минором  $M$  или отличается от него только знаком.

См. также: *Алгебраическое дополнение, Ранг матрицы, Кронекера — Капелли теорема, Крамера правило.*

**МИНУС** — математический знак, имеющий вид горизонтальной черты и используемый для обозначения действия *вычитания* и при обозначении отрицательных чисел. М. был введен немецкими математиками в конце XV в.

См. также: *Плюс, Знаки математические.*

**МИНУТА** — единица измерения величины плоских углов, равная  $1/60$  части *градуса*. М. обозначается косым штрихом:  $'$ ; так, угол величиной  $\alpha$ , содержащий пять минут, записывают так:  $\alpha = 5'$ . Если взять  $1/60$  часть минуты, то это будет *секунда*. Понятие М. отражает сохранение еще до настоящего времени остатков шестидесятеричной системы счисления.

**МНИМАЯ ЕДИНИЦА** — комплексное число (см. *Комплексное число*) вида,  $(0, 1)$ . М. е. обозначается буквой  $i$ . Квадрат М. е. равен  $-1$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$  и вообще  $i^{4n} = 1$  ( $n$  — целое).

**МНИМАЯ ЧАСТЬ** комплексного числа  $z = a + bi$  — действительное число  $b$ . Обозначается  $\text{Im } z = b$ .

**МНИМОЕ ЧИСЛО** — комплексное число (см. *Комплексное число*) вида  $(a; b)$ , где  $b \neq 0$ ,  $b$  — действительное число, т. е. М. ч. — это комплексное число  $z = a + bi$  при  $b \neq 0$ . М. ч.  $a + bi$ , где  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , называется чисто мнимым. Чисто М. ч.  $z$  на комплексной плоскости изображается точками, лежащими на оси  $y$ .

**МНОГОГРАННИК** — тело (или геометрическое тело), граница которого есть объединение конечного числа многоугольников. Граничные многоугольники называются гранями, а их стороны ребрами М. Вершины граней называются вершинами М., а отрезок (или его длина), соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется диагональю М. Если М. имеет  $n$  граней, то

он также называется  $n$ -гранником.  $M$ . называется выпуклым, если он весь лежит по одну сторону (в одном полупространстве) от плоскости его любой грани. Или иначе:  $M$ . называется выпуклым, если любой отрезок с концами, принадлежащими  $M$ ., весь содержится в этом  $M$ . Следовательно, выпуклый  $M$ . есть выпуклая фигура.

$M$ . в известном смысле является пространственным аналогом многоугольника. Если граница  $M$ . гомеоморфна сфере, то  $M$ . называется простым или  $M$ . нулевого рода. Для  $M$ . нулевого рода справедлива теорема Декарта — Эйлера (см. *Эйлера теорема*), связывающая число его вершин, граней и ребер.

Выпуклый  $M$ . называется правильным, если у него все грани — правильные конгруэнтные многоугольники и все многогранные углы конгруэнтные. Правильных  $M$ . всего пять типов (тела Платона), что было доказано еще в «Началах» Евклида. Выпуклые  $M$ ., у которых все грани — правильные равноугольные (с разным числом сторон) многоугольники, а все многогранные углы конгруэнтны, называются полуправильными (архимедовыми). Существуют еще правильные невыпуклые (звездчатые)  $M$ .

См. также: *Тело, Род поверхности, Эйлера теорема, Многоугольник, Правильный многогранник, Гомеоморфизм.*

Лит.: [41, 52, 63, 84, 95].

**МНОГОГРАННЫЙ УГОЛ** — пространственная фигура, которая образуется следующим образом. Пусть имеется некоторый многоугольник ( $n$ -угольник с вершинами  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,  $n \geq 3$ ) и точка  $S$  вне плоскости этого многоугольника. Проведем всевозможные лучи  $SM$ , где  $M$  — любая точка многоугольника, как граничная, так и внутренняя. Объединение всех лучей  $SM$  и есть  $M$ . у. с вершиной  $S$ . Лучи  $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ , проходящие через вершину  $M$ . у. и вершины многоугольника  $A_1A_2 \dots A_n$ , называются ребрами  $M$ . у. Углы, образованные соседними ребрами, называются плоскими углами  $M$ . у. или его гранями. В зависимости от числа граней  $M$ . у. (это число равно числу сторон многоугольника  $A_1A_2 \dots A_n$ ) бывают трехгранные, четырехгранные и т. д. На рисунке 8 изображен четырехгранный угол  $SABCD$ . Если многоугольник  $A_1A_2, \dots, A_n$  выпуклый, то  $M$ . у. называется выпуклым. Если все плоские углы при вершине и двугранные углы при ребрах конгруэнтны, то такой  $M$ . у. называется правильным.

Любой выпуклый 4-гранный угол можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится параллелограмм. В трехгранном угле величина любого плоского угла меньше суммы величин двух других плоских углов и больше их разности. Сумма величин всех плоских углов выпуклого  $M$ . у. меньше  $360^\circ$  (или  $2\pi$  радианов).

Всякая плоскость, пересекающая все ребра  $M$ . у. и не проходящая через вершину его, отсекает от  $M$ . у. пирамиду.

См. также: *Трехгранный угол, Угол, Двугранный угол, Выпуклая фигура.*

**МНОГОЗНАЧНАЯ ФУНКЦИЯ** — некоторое соответствие (отношение), которое есть расширение понятия «функция», состоящее в том, что каждому эле-

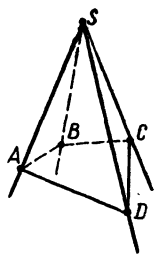


Рис. 8

менту из области определения ставится в соответствие не одно, а несколько (может быть и бесконечное множество) элементов из множества значений.

Понятие М. ф. естественно возникает при рассмотрении обратного соответствия к заданной функции  $f$ , если некоторые (или даже все) значения  $f$  соответствуют не одному, а нескольким элементам области определения функции  $f$ . Так, функция  $y = x^2$  каждое свое положительное значение  $y$  принимает дважды, при  $x_1 = \sqrt{y}$ ,  $x_2 = -\sqrt{y}$ ; обратное соответствие к этой функции является М. ф. (двузначная функция).

Другой важной конструкцией, порождающей М. ф., является аналитическое продолжение аналитической функции комплексного переменного.

Если для каждого значения аргумента М. ф. выбрать (среди нескольких) только одно значение, то получится (однозначная) функция, называемая однозначной ветвью М. ф. При этом часто требуют, чтобы эта ветвь обладала дополнительными свойствами (непрерывность и др.). **П р и м е р.** Аналитическая функция  $w = L_n z$  (см. *Логарифм*),  $w = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$ ,  $w = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) является М. ф. При  $k = 0$  в односвязной области, не содержащей точки  $z = 0$ , можно выделить непрерывную однозначную ветвь функции  $w = L_n z$ .

**МНОГОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО** — синоним *арифметического пространства*  $n$ -измерений. Термин М. п. употребляется также в значениях линейного (векторного) пространства  $n$  измерений, аффинного пространства  $n$  измерений, а также в значении  $n$ -мерного многообразия (реже).

М. п. — обобщение понятия реального физического трехмерного пространства.

**МНОГООБРАЗИЕ** — геометрическое понятие, обобщающее понятие поверхности без самопересечений и без краев. Определение М. устанавливает однородность строения окрестностей каждой точки многообразия. Кроме того, определение М. носит, так сказать, внутренний характер, т. е. не связано с неким пространством, вмещающим М. в себя, как это имеет место при описании поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

М. размерности  $n$  есть *хаусдорфово топологическое пространство*  $M$ , вместе с системой  $S$  подмножеств (карт) на нем, объединение которых совпадает с  $M$ . При этом для каждого  $A \in S$  задан гомеоморфизм  $\varphi: A \rightarrow E_n$ , где  $E_n$  — открытый шар евклидова пространства размерности  $n$ .

М. размерности  $n$  называется гладким класса  $C^r$ , если для каждых двух карт  $A, B \in S$  и соответствующих им отображений  $\varphi: A \rightarrow E_n$ ,  $\psi: B \rightarrow E_n$  выполнено условие отображение;  $\varphi \circ \psi^{-1}: E_n \rightarrow E_n$  класса  $C^r$ , т. е. задается функциями, все частные производные которых порядка  $\leq r$  непрерывны.

Говорят также, что набор карт, составляющих множество  $S$  (атлас), определяет гладкую структуру на  $M$ . При этом два атласа на  $M$  называются эквивалентными, если их объединение задает на  $M$  гладкую структуру класса  $C^r$ .

**П р и м е р ы.** 1. Открытая область  $\Omega$  в евклидовом пространстве  $E^n$  является М. Атлас на  $\Omega$  можно задать, взяв в качестве карт окрестности  $A$  некоторых  $x \in M$  точек вида  $A = \{y \mid \rho(x, y) < a\}$ , покрывающих  $M$  ( $\rho$  — евклидово расстояние между точками).

2. Сфера  $S^{n-1}$  в евклидовом пространстве  $E^n$ . Атлас на  $S^{n-1}$  можно построить,

например, следующим образом. Зададим  $S^{n-1}$  уравнением  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — координаты точки  $x$  в объемлющем евклидовом пространстве. Назовем точки  $(0, 0, \dots, 1)$ ,  $(0, 0, \dots, 0, -1)$  соответственно северным и южным полюсом сферы  $S^{n-1}$ . Рассмотрим два подмножества в  $S^{n-1}$  (две карты):

$$A = \left\{ x \mid x_n < \frac{1}{2} \right\}, \quad B = \left\{ x \mid x_n > -\frac{1}{2} \right\}; \quad A \cup B = S^{n-1}.$$

Отображения  $\varphi: A \rightarrow E^n$ ,  $\psi: B \rightarrow E_n$  зададим с помощью стереографической проекции:  $\varphi$  — проекция из северного полюса, а  $\psi$  — из южного. Построенная гладкая структура имеет гладкость класса  $C^\infty$ .

Справедлива теорема (Дж. Уайтхед): всякое компактное  $M$  класса  $C^r$  размерности  $n$  может быть вложено в евклидово пространство  $E^{2n+1}$  так, что индуцируемая этим вложением гладкая структура будет эквивалентна исходной.

Лит.: [72, 94].

**МНОГОСВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ** — область, не являющаяся *односвязной областью*. Это значит, что в  $M$  о. существует по крайней мере одна замкнутая кривая, которую нельзя стянуть в точку так, чтобы в любой момент стягивания кривая принадлежала этой области.

Простейшим примером  $M$  о. является кольцо — множество точек  $(x, y)$  декартовой плоскости, координаты  $(x, y)$  которых удовлетворяют неравенствам

$$r \leq x^2 + y^2 \leq R, \quad 0 < r < R.$$

Для  $M$  о. в отличие от односвязных несправедливы, вообще говоря, некоторые теоремы дифференциального и интегрального исчисления функций нескольких переменных, теории функций комплексного переменного и др. (Речь идет о тех теоремах, формулировка которых содержит предположение об односвязности рассматриваемой области — например, теорема о независимости криволинейного

интеграла  $\int_{(L)}^B P dx + Q dy$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  от кривой  $(L)$ , соединяющей точки  $A$  и  $B$ ,

справедлива в односвязной области  $D$  (которой принадлежат рассматриваемые пути) и несправедлива для  $M$  о.

Существует более общее (и более точное) понятие многосвязности:

Топологическое пространство  $X$  называется  $n$ -связным, если при всех  $q \leq n$  *гомотопические группы*  $\pi^q(X)$  пространства  $X$  состоят из одного элемента. Это значит, что непрерывный образ сферы  $S^q$ ,  $q \leq n$  может быть стянут по пространству  $X$  в точку. Речь здесь идет о множестве  $f(S^q)$ , где  $f: S^q \rightarrow X$  — непрерывное отображение.

**МНОГОУГОЛЬНИК** — объединение простой (без самопересечений) замкнутой ломаной и ее внутренней области. Сама ломаная называется *границей  $M$* . Отдельные звенья ломаной или их длины называются *сторонами  $M$* , вершины ломаной — *вершинами  $M$* . Отрезок, соединяющий две несоседние вершины  $M$ , называется его *диагональю*. Иногда рассматривают пространственные  $M$  как замкнутые простые ломаные, не лежащие в одной плоскости (неплоские  $M$ , одномерные  $M$ ), что обычно, как правило, оговаривается в тексте.

Внешняя область  $M$  содержит прямую, целиком расположенную в этой области, внутренняя область никакой прямой не содержит. Иногда  $M$ ., определе-



ние которого давалось через простую замкнутую область, называют также *простым* или *гомеоморфным* кругу. Непростой многоугольник иначе называется *звездчатым*.

*М.* называется *выпуклым*, если отрезок, соединяющий две его любые точки, принадлежит этому *М.* (содержится в нем). Иногда выпуклый *М.* определяют и так: *М.* называется *выпуклым*, если он весь лежит по одну сторону (в одной полуплоскости) от прямой, содержащей его какую-либо сторону. Сумма величин внутренних углов *М.* (простого) равна  $180^\circ (n - 2)$ , где  $n$  — число сторон. Часто бывает удобно называть *М.*, имеющий  $n$  сторон, *n-угольником* ( $n \geq 3$ ). Число сторон *М.* равно числу его вершин.

Число диагоналей всякого *М.* равно числу сочетаний из  $n$  по 2 минус число его сторон, т. е. равно  $n(n - 3)/2$ .

См. также: *Правильный многоугольник, Деление круга, Вписанный многоугольник, Описанные фигуры, Подобные фигуры.*

**МНОГОУГОЛЬНЫЕ ЧИСЛА** — числа, связанные определенным образом с плоским многоугольником. Простейшими из *М. ч.* являются треугольные числа. Это числа последовательности

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \dots$$

которые, начиная со второго, геометрически получаются из треугольника, вершины которого дают три точки (рис. 9, а) — треугольник с наименьшим числом точек, затем треугольник больший, стороны которого увеличены в 2 раза (6 точек), затем в 3 раза (10 точек) и т. д.

Квадратными числами будут числа последовательности 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...,  $n^2$  ... (рис. 9, б). Пятиугольными числами будут числа последовательности 1, 5, 12, 22, 35, 51, ...,  $\frac{n(3n-1)}{2}$ , ... (рис. 9, в).

Таким образом, получают *М. ч.* различных порядков. Обозначается *n-е q-угольное* число символом  $P_n^q$ . Оно определяется по формуле

$$P_n^q = n + (q-2) \frac{n(n-1)}{2}.$$

Эту формулу можно истолковать еще и так:

$$P_n^q = n + S_n(q),$$

где  $n$  — порядковый номер *q-угольного* числа,  $S_n(q)$  — сумма первых  $n$  членов арифметической прогрессии, первый член которой равен нулю ( $a_1 = 0$ ), а разность равна  $q - 2$ . *М. ч.* называются также *полигональными* числами.

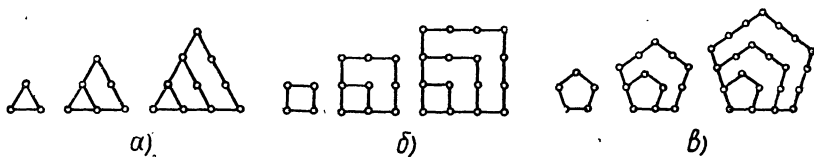


Рис. 9

Есть основание предполагать, что М. ч. возникли у вавилонян при расчетах мощения пола кирпичом. Из Вавилона М. ч. перешли к грекам (начиная с пифагорейцев). Диофант написал целую книгу о М. ч. (IV—III вв. до н. э.). Историки-математики утверждают, например, что треугольные числа были известны в Индии (во II в. до н. э.), в Китае (в 1309 г.).

М. ч. занимались многие математики: Ферма, Эйлер, Лагранж, Лежандр, Гаусс и др. См. также: *Фигурные числа*, *Арифметический ряд*.

Лит.: [31, 98].

**МНОГОЧЛЕН** (полином) от  $n$  неизвестных (переменных) над полем  $P$  — сумма произвольного числа *одночленов* от  $n$  неизвестных над полем  $P$ . Порядок суммирования членов М. можно произвольно менять. Можно добавлять произвольные одночлены М. с нулевыми коэффициентами и выбрасывать такие члены. Множество всех М. от  $n$  неизвестных над полем  $P$  образует *кольцо*  $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$  относительно операций суммы и произведения М. В М. можно выполнять приведение *подобных членов*. Для М. возможно *каноническое представление* М.

Иногда в элементарной математике М. называют алгебраическое выражение, представляющее сумму (разность) конечного числа одночленов; например  $5x^3 - 3y^2 + xy + 4y$ .

**МНОГОЧЛЕН ДЕЛЕНИЯ КРУГА** на  $n$  частей — многочлен от одного переменного со старшим коэффициентом 1, множество корней которого совпадает с множеством *первообразных корней*  $n$ -й степени из единицы.

Для простого  $n$  М. д. к. имеет вид

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1.$$

Для  $n = 6$  М. д. к. таков:

$$(x - \alpha)(x - \alpha^5) = x^2 - x + 1,$$

где

$$\alpha = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

М. д. к. играет определенную роль в задаче о делении круга на  $n$  частей с помощью циркуля и линейки, в аналитической теории чисел и теории Галуа (см. *Галуа теория*).

М. д. к. является *неприводимым многочленом* над полем действительных чисел (при  $n \geq 3$ ).

Лит.: [10].

**МНОГОЧЛЕН НУЛЕВОЙ СТЕПЕНИ.** При изучении многочленов над коммутативно-ассоциативным кольцом, в частности полем  $K$ , М. н. с. называют элементы кольца  $K$ , отличные от нуля, т. е. константы. В теории делимости многочленов большинство вопросов рассматривается с точностью до делимости на М. н. с.

**МНОЖЕСТВО** — одно из важнейших понятий математики. Вводится аксиоматически и не может быть определено через какие-либо элементарные понятия. Описательное объяснение термина М.: совокупность, объединение некоторых объектов произвольной природы — элементов М. Хотя М. могут состоять из элементов произвольной природы, однако каждое конкретное М. представляет собой объединение элементов по каким-либо общим для них свойствам (призна-

кам). Эти общие свойства элементов  $M$  содержатся в самом названии (задании) каждого  $M$ . Так, например, в  $M$  целых чисел все элементы суть целые числа, и это свойство является общим для всех элементов. Все объекты, обладающие этим свойством, в данном случае представляют собой объединение —  $M$ . Аналогично можно рассматривать  $M$  звезд во вселенной,  $M$  точек на плоскости,  $M$ , элементами которого являются все конечные  $M$ . (т. е.  $M$ , состоящие из конечного числа элементов), и т. д.

**МНОЖЕСТВ ТЕОРИЯ** — раздел математики, изучающий множества, отвлекаясь от конкретной природы элементов множества.  $M$ . т. рассматривает множества с точки зрения таких отношений, как *взаимнооднозначное соответствие* (биекция), *упорядочение*, *отображение* множеств. Понятие взаимно однозначного соответствия естественным образом приводит к понятию *мощности множества*, *кардинальных чисел*; отношение порядка приводит к *трансфинитным числам*, а затем к *трансфинитной индукции*. Простейшими операциями над множествами являются *объединение множеств* и *пересечение множеств*. Являясь весьма абстрактной теорией,  $M$ . т. не свободна от трудностей (см. *Цермело аксиома*). Существуют два больших течения в  $M$ . т.: одно признает аксиому Цермело, а другое отрицает.

$M$ . т. занимает видное место в математике. В конце прошлого века  $M$ . т. произвела революцию в анализе, дав его строгое обоснование (учение о числе Дедекинда и т. п.). В XX в. идеи  $M$ . т. все более пронизывают математику. Теоретико-множественная аксиоматика теории вероятностей оказалась наиболее прочным фундаментом этой математической дисциплины.  $M$ . т. широко применяется в *качественной теории* дифференциальных уравнений, *топологии*, *вариационном исчислении*, теории функций вещественной переменной. Один из разделов  $M$ . т. занимается вопросами строения точечных множеств в  $n$ -мерном евклидовом пространстве (см. *Дескриптивная теория множеств*). Основателями  $M$ . т. являются чешский математик Б. Больцано, немецкие математики Г. Кантор и Р. Дедекинд, получившие фундаментальные результаты теории (XIX в.).

Лит.: [4, 46].

**МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ**  $f$  — это образ  $\text{Im}f$  при отображении  $f: x \rightarrow y$  или, допуская вольность, множество значений, принимаемых зависимой переменной (см. *Функция*).  $M$ . з. ф. называют иногда, что неточно, также областью изменения функции. Часто рассматривают  $M$ . з. ф. на данном множестве  $E$  значений аргумента, т. е. множество значений, принимаемых функцией, когда аргумент пробегает множество  $E$ ; например,  $M$ . з. ф.  $y = x^2 + 4$  на отрезке  $[1; 5]$  является отрезком  $[1; 29]$ .

**МНОЖИТЕЛЬ** — число или выражение, на которое умножается другое число или выражение справа или слева. В произведении  $ab$  число  $a$  — множитель числа  $b$  слева, а число  $b$  — множитель числа  $a$  справа.  $M$ . слева и справа в произведении  $ab$  некоторые авторы называют сомножителями (сравните: собратья, сонаправленные лучи, сонаправленные векторы). Иногда  $M$ . имеет при себе специальное прилагательное: *нормирующий множитель*, *интегрирующий множитель*.

При сложении дробей с разными знаменателями, например  $a/b + c/ab^2$ , пользуясь основным свойством дроби, их приводят к наименьшему общему зна-



Рис. 10

менателю, умножая числитель и знаменатель каждой дроби на определенное число, разное для каждой дроби. Каждый из  $M$ , для этих дробей называют дополнительным множителем. Дополнительный  $M$ , (для первой дроби равен  $ab$ , для второй 1) иногда ставят слева сверху над числителем дроби и подчеркивают его косой чертой или дугой:

$$\frac{\overline{ab}}{b} + \frac{\overline{1}}{ab^2} = \frac{a^2b + c}{ab^2}.$$

См. также *Коммутативность, Знаки математические*.

**МОДЕЛЬ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ  $T$**  — множество объектов  $M$ , свойства которых и отношения между ними в  $M$  *биективно* отображаются на свойства и отношения объектов теории  $T$ . Непротиворечивость теории доказывается на  $M$ , а. т.

**Примеры.** 1.  $M$ , а. т. плоской геометрии Лобачевского — модель Кэли — Клейна, см. *Клейна интерпретация* (рис. 10, а).

2.  $M$ , а. т. плоской геометрии Лобачевского — модель А. Пуанкаре (рис. 10, б), в которой «точки» плоскости Лобачевского — точки полуплоскости Евклида, не включая точки граничной прямой  $l$ , а «прямые» — полуокружности этой полуплоскости с центрами на  $l$  или лучи, перпендикулярные  $l$ , с началом на  $l$ . Через точку  $A \notin a$  проходят две прямые  $a'$  и  $a''$ , параллельные прямой  $a$ . Все аксиомы и отношения плоскости Лобачевского можно проверить на этой  $M$ , а. т., используя при этом преобразование *инверсии*.

$M$ , а. т. называют также интерпретацией этой теории.

См. также: *Параллельные прямые*.

**МОДЕЛЬ** — *алгебраическая система*, в которой множество операций (в том числе и нулевых, т. е. констант)  $\Omega_F$  пусто.

**МОДУЛЬ:** 1<sup>0</sup>.  $M$ , действительного числа  $x$  (обозначается  $|x|$ ) есть неотрицательное число, удовлетворяющее следующему условию:  $|x| = x$ , если  $x \geq 0$ , и  $|x| = -x$ , если  $x < 0$ .  $M$ , д. ч.  $x$  геометрически выражает расстояние от начала отсчета до точки, изображающей число  $x$  на числовой прямой. Из определения  $M$ , д. ч. легко выводятся такие соотношения:  $|x| = |-x|$ ;  $|x|^2 = x^2$ ;  $|x|^3 = = |x^3| = x^3$ ;  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ;  $|a| : |b| = |a : b|$ ,  $b \neq 0$ ; легко усматриваются также соотношения:

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|; ||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|.$$

Понятие М. д. ч. часто используется при решении уравнений и неравенств, при построении графиков функций и графиков уравнений с двумя переменными. Определить М. д. ч. можно и иначе:  $|x| = \max\{x, -x\}$ , т. е. модуль числа  $x$  есть максимальное из двух чисел  $x$  и  $(-x)$ , или еще  $|x| = \sqrt{x^2}$ .

20. М. комплексного числа  $z = x + iy$  (обозначается  $|z|$ ) есть неотрицательное число, равное:  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , откуда получаем:  $|z| \geq 0$ .

М. к. ч. выражает расстояние от начала отсчета до точки, изображающей комплексное число  $z$  на комплексной плоскости. Аналогично рассматривают понятие модуля функции  $|f(x)|$ . Понятие модуля используется при рассмотрении сходимости и расходимости рядов (см. *Абсолютно сходящийся ряд*), при изучении предела функции, при оценке погрешности в действиях с приближенными числами.

Примеры. 1) Множество решений уравнения  $|x - 5| = -2$  есть  $\emptyset$  (пустое множество). 2) Множество решений уравнения  $|x| = 3$  есть  $\{3; -3\}$ , т. е.  $x \in \{3; -3\}$ . 3) Решение уравнения  $|x + 2| + |2 - x| = 4$  есть числовой промежуток  $[-2; 2]$ . 4) Решение неравенства  $|3 - x| + |x + 3| > 5,3$  есть  $R$ , т. е. множество всех действительных чисел. 5) Множеством решений уравнения  $|x - 3| + |x + 3| = 8$  является множество, состоящее из двух чисел 4 и  $(-4)$ , т. е.  $x \in \{-4; 4\}$ .

Графики функций: а)  $y = ||x| - 1|$ , б)  $y = |x^2 - 1|$  изображены на рисунке 11, а и б; графики уравнений: а)  $|x| + |y| = 1$ , б)  $|x| : x = |y| : y$ , в)  $|x| - x = |y| - y$  показаны на рисунке соответственно 11, в, г, д.

Множество точек комплексной плоскости, для которых выполняется условие  $2 < |z| < 3$ , есть множество точек этой плоскости, заключенных между двумя концентрическими окружностями (*кольцо*), имеющими центр в начале координат и радиусы, равные 2 и 3 единицам длины (рис. 11, е). Модуль функции  $f(z) = e^z$ ,

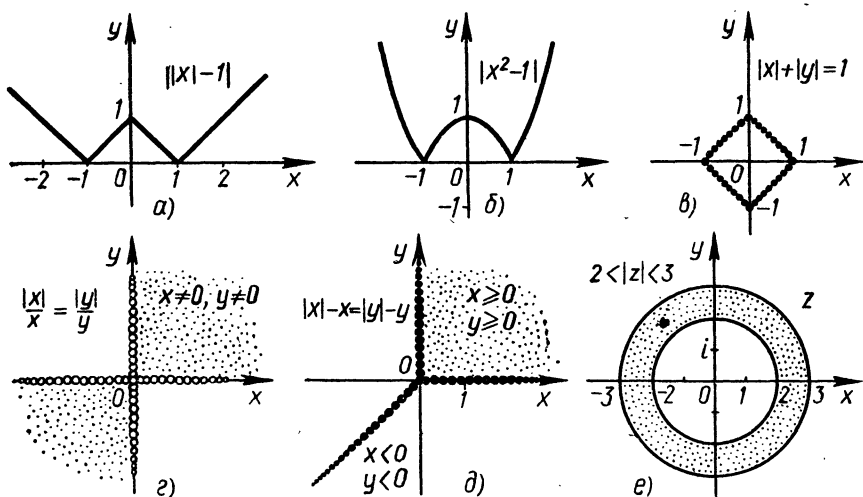


Рис. 11

где  $z = x + iy$ , будет равен:  $|e^z| = e^x$ , где число  $e$  — основание натуральных логарифмов (см. *e-Число*).

**М.** числа (комплексного и, в частности, действительного) иначе называется *абсолютной величиной* его.

**3<sup>0</sup>. М. перехода** от системы логарифмов при основании  $a$  к системе логарифмов при основании  $b$  ( $a \neq 1, a > 0, b \neq 1, b > 0$ ) — число  $M = \frac{1}{\log_a b}$ .

Если известны логарифмы при основании  $a$ , то, умножая их на число  $M$  (М. п.), получим логарифмы при основании  $b$ , т. е.  $\log_b x = M \log_a x$ . Например, М. п. от десятичных логарифмов к *натуральным* равен:  $M = 2,30258\dots$ , М. п. от натуральных логарифмов к десятичным равен:  $M = 0,43429\dots$ .

**4<sup>0</sup>. М. сравнения** в теории чисел — всякое натуральное число  $m \geq 1$ , на которое делится разность двух целых чисел  $a$  и  $b$ , т. е. если  $m | (a - b)$ , что записывают так:  $a \equiv b \pmod{m}$ , читается:  $a$  сравнимо с  $b$  по модулю  $m$ .

**5<sup>0</sup>. М. над кольцом**  $R$  — аддитивно записанная абелева группа  $M$  вместе с отображением  $\varphi: R \times M \rightarrow M$ , записываемым  $(r, m) \rightarrow rm$  и таким, что для любых элементов  $r_1, r_2 \in R$  и  $m_1, m_2 \in M$  удовлетворяются следующие аксиомы:

$$(M1) \quad r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2,$$

$$(M2) \quad (r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m,$$

$$(M3) \quad (r_1r_2)m = r_1(r_2m),$$

$$(M4) \quad 1m = m.$$

Абелева группа  $M$  в этом случае называется *левым  $R$ -модулем*. Аналогичное определение дается *правому  $R$ -модулю*  $M$ . Кольцо  $R$  при этом называется часто *кольцом скаляров*, а его элементы — *скалярами*.

Иногда левый  $R$ -модуль  $M$  или правый  $R$ -модуль  $M$  называют проще:  $R$ -модуль  $M$  или еще проще: модуль. Кратко левый  $R$ -модуль  $M$  часто обозначают  ${}_R M$ , а правый —  $M_R$ .

Понятие **М. н. к.** является одним из фундаментальных и обобщающих в алгебре.

**Примеры.** 1. Любой идеал  $I$  кольца  $R$  является  $R$ -модулем; в частности, само кольцо  $R$  есть  $R$ -модуль.

2. Любая абелева группа  $G$  является  $\mathbf{Z}$ -модулем, так как отображение  $(n, g) \rightarrow ng$  из  $\mathbf{Z} \times G$  в  $G$  удовлетворяет всем аксиомам M1—M4 ( $ng = g + g + \dots + g$  всего  $n$  раз).

3. Если кольцо  $R$  является полем  $k$ , то  $R$ -модуль есть векторное пространство над  $k$ . Таким образом, векторное пространство есть частный случай понятия модуля. В зависимости от свойств кольца и дополнительных ограничений, налагаемых на **М. н. к.**, рассматриваются различные множества модулей.

Лит.: [5, 9, 14, 36, 45, 42, 47, 76, 95].

**МОЛЬВЕЙДЕ ФОРМУЛЫ** — формулы плоской *тригонометрии*, выражающие следующую зависимость между сторонами (их длинами) и углами (их вели-

чинами) треугольника:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}{\sin \frac{\widehat{C}}{2}}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}{\cos \frac{\widehat{C}}{2}}.$$

М. ф. названы по имени немецкого математика К. Мольвейде, использовавшего их, хотя эти формулы были известны и другим математикам.

**МОМЕНТ** случайной величины  $X$   $k$ -го порядка — *математическое ожидание* величины  $(X - A)^k$ . При  $A = 0$  М. называют начальным (обозначается  $m_k$ ), при  $A = MX$  — центральным (обозначается  $m'_k$ ), в случае иного значения  $A$  — относительным (обозначается  $m'_k$ ).

Многие числовые характеристики случайной величины  $X$  просто выражаются через М.

Рассматривают также М. статистических распределений  $X$ , понимая под этим среднее значение  $(X - A)^k$ .

Лит.: [17, 43].

**МОНОТОННАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ** (или функция) — невозрастающая или неубывающая *последовательность* (или *функция*).

**МОНОТОННО ВОЗРАСТАЮЩАЯ** (убывающая) последовательность или функция — возрастающая (убывающая) *функция* или *последовательность*.

**МОНТЕ-КАРЛО МЕТОД** — метод, широко применяемый в настоящее время для приближенного решения различных задач вычислительной математики: вычисление кратных интегралов, решение дифференциальных уравнений и т. п. Сущность М.-К. м. заключается в следующем: величине  $x$ , которую нужно приближенно вычислить, ставится в соответствие некоторая случайная величина  $X$ , *математическое ожидание* которой  $MX$  равно  $x$ . Затем каким-нибудь способом эта случайная величина многократно реализуется, из получаемых значений образуется некоторое среднее, которое и принимается за приближенное значение величины  $x$ . Случайные числа берутся, либо из таблицы случайных чисел, либо от некоего физического датчика, либо вычисляются методами теории чисел (так называемые псевдослучайные числа).

Например, чтобы найти  $\int_0^1 f(x) dx$ , где  $f(x)$  — ограниченная интегрируемая функция, берется последовательность случайных чисел  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , равномерно распределенных на отрезке  $[0; 1]$ , и образуется величина 
$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n},$$

которая и принимается за приближенное значение  $\int_0^1 f(x) dx$ . Ошибка при этом будет с вероятностью, практически равной единице, не больше чем  $\frac{c}{\sqrt{n}}$ , где  $c$  — некоторая константа, зависящая от  $f(x)$ . Название М.-К. м. связано с названием города, знаменитого своим игорным домом.

**МОРА — МАСКЕРОНИ ПОСТРОЕНИЯ** — геометрические построения на плоскости, выполняемые с помощью только одного циркуля. М. — М. п. названы

по имени датского математика Г. Мора и итальянского математика Л. Маскерони, изучавших эти построения.

См. также: *Геометрические построения, Маскерони построения.*

**МОРЛИ ТЕОРЕМА** — следующее утверждение: три точки пересечения смежных *трисектрис* внутренних углов произвольного треугольника являются вершинами равностороннего треугольника.

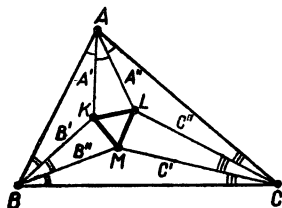


Рис. 12

На рисунке 12 три точки пересечения смежных трисектрис, лучей  $AA'$  и  $BB'$ ,  $AA''$  и  $CC''$ ,  $CC'$  и  $BB''$ , пересекаются в трех точках  $K$ ,  $L$  и  $M$  — вершинах равностороннего треугольника  $KLM$ .

М. т. названа по имени американского математика Ф. Морли, доказавшего ее в 1899 г. (Frank Morley).

См. также: *Биссектриса.*

Лит.: [41].

**МОРГАНА (де МОРГАНА) ЗАКОНЫ** в высказываний исчислении устанавливают равнозначность отрицания *конъюнкции* (*дизъюнкции*) высказываний с дизъюнкцией (*конъюнкцией*) отрицаний этих высказываний, а именно:  $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$  и  $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$ .

М. д. з. справедливы в любой булевой алгебре, и в частности для теоретико-множественных операций пересечения, объединения и взятия *дополнительного множества*.

М. д. з. названы именем шотландского математика и логика Огастеса де Моргана (1806—1871), четко их сформулировавшего и весьма полно исследовавшего, хотя отдельные подходы к М. д. з. были и у ряда ученых древности и средневековья.

Лит.: [59].

**МОРСА ТЕОРИЯ** — теория, изучающая топологические и гомотопические свойства многообразий с помощью исследования заданных на многообразиях гладких функций и функционалов. В последнее время с помощью М. т. был получен ряд глубоких результатов. Основания теории заложены американским математиком М. Морсом.

**МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА** — обобщение на произвольные множества (как конечные, так и бесконечные) понятия «число элементов». М. м. определяется как то общее, что присуще всем множествам, эквивалентным данному множеству, т. е. всем множествам, элементы которых могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие с элементами данного множества.

С использованием аксиом теории множеств можно дать строгую теорию, описывающую М. м.

Понятие М. м. введено в математику Г. Кантором, основоположником теории множеств (1879), которым было показано существование различных мощностей для бесконечных множеств. См. *Счетное множество, Континуума проблема*. М. м. часто называют кардинальным числом этого множества и обозна-



чают для бесконечных множеств по Кантору через  $\aleph$  (алеф) с различными индексами.

Лит.: [46].

**МУАВРА ФОРМУЛА** — формула, позволяющая возводить в степень комплексное число, представленное в тригонометрической форме. М. ф. имеет вид:

$$z^n = [\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

где  $\rho$  — *модуль*, а  $\varphi$  — *аргумент комплексного числа*  $z$ . М. ф. используется для выражения  $\cos n\varphi$  и  $\sin n\varphi$  через степени  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ . М. ф. названа по имени английского математика А. де Муавра, друга И. Ньютона. М. ф. содержится в скрытом виде в одной из его работ 1722 г. В современной символике М. ф. опубликована Л. Эйлером в 1738 г. М. ф. иногда называют Моавра формулой.

**МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ГРУППА** — *группа*, в которой основная групповая операция обозначается символом  $\cdot$  и называется умножением. Термин происходит от латинского *multiplicatio* — умножение.

**МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ.** Функция  $Q(n)$ , определенная для всех натуральных значений аргумента  $n$ , называется М. ф.; если: 1)  $Q(k) \neq 0$  хотя бы для одного  $k$ , т. е.  $Q(n)$  не равна тождественно нулю, и 2) если  $(k_1, k_2) = 1$ , то  $Q(k_1 k_2) = Q(k_1) \cdot Q(k_2)$ . Если условие 2) выполнено для произвольных двух чисел  $k_1$  и  $k_2$  (не обязательно взаимно простых), то функция называется вполне М. ф.

**П р и м е р ы** М. ф.: *Эйлера функция*; *Мёбиуса функция*, функция  $\tau(n)$ , равная числу (натуральных) делителей натурального числа  $n$ ; функция  $\sigma(n)$ , равная сумме (натуральных) делителей натурального числа  $n$ ; степенная функция  $f(n) = n^s$  будет не только М. ф., но и вполне М. ф.

**НАБЛА-ОПЕРАТОР** ( $\vec{\nabla}$ -оператор, или оператор Гамильтона) — дифференциальный оператор, определенный на дифференцируемых функциях трех переменных, принимающих значения в множестве векторных полей трехмерного евклидова пространства. Н. о. имеет вид:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы положительного направления декартовых осей  $x, y, z$ .

Важнейшие характеристики скалярных и векторных полей в евклидовом трехмерном пространстве просто и выразительно описываются в терминах Н. о. Так, градиент скалярного поля  $f$  равен:

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k};$$

дивергенция векторного поля  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  равна:

$$\text{div } \vec{F} = (\vec{\nabla}, \vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Ротор векторного поля  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  равен:

$$\text{Rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

В написанных формулах «умножение» Н. о. на функцию  $f$ , «скалярное» и «векторное умножение» Н. о. на  $\vec{F}$  производится аналогично обыкновенному умножению вектора на число, скалярному и векторному произведению вектора на вектор с той только разницей, что «умножение» «координат» Н. о.  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  на функции является дифференцированием этих функций по соответствующему аргументу. Удобство этой аналогии видно из следующих вычислений:  $\text{Rot grad } f =$

$= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$  («векторное произведение» двух «коллинеарных» векторов),  
 $\text{Div rot } \vec{F} = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$  («смешанное произведение» трех «векторов», из которых два одинаковых).

Название Н. о. происходит от греч.  $\alpha\upsilon\beta\lambda\alpha$  — арфа, форма которой напоминает символ  $\nabla$ .

$\nabla$  — буква финикийского алфавита, происхождение которой действительно связано с музыкальным инструментом типа арфы.

Н. о. введен английским математиком У. Р. Гамильтоном в 1853 г.

Лит.: [87, 94].

**НАГЕЛЯ ТОЧКА** — точка пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника и точки касания (прикосновения) противоположных сторон с вневписанными окружностями этого треугольника. Названа по имени немецкого математика Нагеля, изучавшего эту точку.

**НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ:**  $1^0$ . Н. о. д. нескольких натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  есть наибольшее из натуральных чисел, на которое делится каждое из данных чисел. Например, Н. о. д. чисел 16 и 24 есть число 8, что часто записывают так:  $(16; 24) = 8$ , или Н. о. д.  $(16; 24) = 8$ , или еще короче:  $D(16; 24) = 8$ , где  $D$  означает «делитель».

Понятие Н. о. д. используется при сокращении дробей. Для отыскания Н. о. д. нескольких чисел надо разложить их на простые множители и составить произведение из общих множителей в наименьших степенях. Так,  $16 = 2^4$ ,  $24 = 2^3 \cdot 3$ , следовательно Н. о. д. данных чисел будет равен:  $2^3 = 8$ .

При отыскании Н. о. д. двух чисел в общем случае пользуются алгоритмом Евклида. Если Н. о. д. двух чисел равен 1, то эти числа называются взаимно простыми. Произведение Н. о. д.  $(a, b)$  и наименьшего общего кратного этих чисел равно произведению  $ab$ .

$2^0$ . Н. о. д. многочленов  $f_1, f_2, \dots, f_k$  — такой общий делитель многочленов  $f_1, f_2, \dots, f_k$ , который делится на всякий другой их общий делитель. Н. о. д. многочленов определяется однозначно с точностью до множителя нулевой степени. Н. о. д. многочленов часто записывают символом  $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ . Практическое отыскание Н. о. д. многочленов  $f_1, f_2, \dots, f_k$  в кольце многочленов от одной переменной  $p(x)$  производится с помощью последовательного применения алгоритма Евклида. Одно из важных свойств Н. о. д. многочленов, имеющее приложения к другим вопросам, состоит в том, что если  $d = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ , то существуют многочлены  $g_1, g_2, \dots, g_k$  такие, что будет выполняться равенство

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_k g_k = d.$$

Н. о. д. имеет смысл и в кольце главных идеалов, и в факториальном кольце. См. также: *Наименьшее общее кратное, Делитель целого числа.*

**НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ.** Пусть  $f(x)$  — произвольная непрерывная функция, а  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  — фиксированная система непрерывных функций на отрезке  $[a; b]$ . Максимум выражения  $|f(x) - \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)|$  на отрезке  $[a; b]$  называют отклонением функции  $f(x)$  от  $P_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$ . Минимум отклонения при всевозможном выборе коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  называется наилучшим приближением функции  $f(x)$  посредством системы  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ ,

$\Phi_n(x)$ . Понятие Н. п. впервые введено П. Л. Чебышевым.

**НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ.** Н. о. к. нескольких целых чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  есть наименьшее целое положительное число, делящееся на каждое из данных чисел. Например, Н. о. к. чисел 6; 28; —15 есть число 420, что записывают так: Н. о. к. (6; 28; —15) = 420. Понятие Н. о. к. используется, например, при сложении и вычитании обыкновенных дробей.

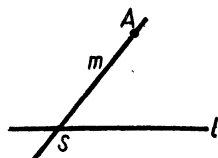


Рис. 13

Для отыскания Н. о. к. данных чисел следует разложить каждое из них на простые множители и составить произведение, взяв каждый из простых множителей с наибольшим из встретившихся показателей. Так,  $6 = 2 \cdot 3$ ,  $28 = 2^2 \cdot 7$ ,  $15 = 3 \cdot 5$ , следовательно, Н. о. к. этих чисел есть число  $2^2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 420$ .

Н. о. к. нескольких многочленов над каким-либо полем есть многочлен наименьшей степени, делящийся на каждый из данных. Например, Н. о. к.  $(x - 3, x^2 + 3x + 9) = x^3 - 27$  в кольце многочленов над полем рациональных чисел.

Понятие Н. о. к., рассмотренное выше в кольце целых чисел  $\mathbb{Z}$  и кольце многочленов  $P(x)$ , обобщается на произвольное евклидово кольцо и более общо на кольца главных идеалов и факториальное кольцо.

Лит.: [11, 45, 95].

**НАКЛОННАЯ:** 1°. Н. к прямой  $l$  — всякая прямая  $m$ , пересекающая прямую  $l$  под углом, отличным от прямого. Точка пересечения  $S$  прямой  $l$  с прямой  $m$  называется основанием наклонной (рис. 13). Длина отрезка Н. от какой-либо фиксированной ее точки  $A$ , отличной от основания  $S$ , до  $S$  называется длиной Н. (сравните с определением длины касательной). Иногда Н. к прямой называют всякий отрезок  $AS$ , не перпендикулярный к  $l$ , один из концов которого принадлежит прямой  $l$ .

2°. Н. к плоскости — всякая прямая, пересекающая плоскость под углом, отличным от прямого. Основание и длина Н. к плоскости определяются аналогично основанию и длине Н. к прямой.

**НАПРАВЛЕНИЕ** на плоскости (в пространстве) — множество лучей, сонаправленных с данным лучом этой плоскости. Два луча  $[AB)$  и  $[CD)$  называются сонаправленными, если они параллельны и лежат в одной полуплоскости с границей  $(AC)$ . Если же эти лучи параллельны и лежат в разных полуплоскостях с границей  $(AC)$ , то они называются противоположенными, или противоположно направленными, или антинепараллельными. Сонаправленные лучи называются также одинаково направленными.

Пример: четыре вершины квадрата задают 8 направлений (4 направления задают две смежные стороны и 4 — две диагонали).

**НАПРАВЛЯЮЩИЕ КОСИНУСЫ** вектора  $\vec{r}$  в трехмерном евклидовом пространстве — косинусы углов  $\alpha, \beta, \gamma$ , образуемых вектором  $\vec{r}$  с единичными осями осей координат  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  —  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ . Имеют место соотношения  $\cos \alpha = \frac{1}{|\vec{r}|} (\vec{r}, \vec{i})$ ,  $\cos \beta = \frac{1}{|\vec{r}|} (\vec{r}, \vec{j})$ ,  $\cos \gamma = \frac{1}{|\vec{r}|} (\vec{r}, \vec{k})$ , где  $(\vec{r}, \vec{i}), (\vec{r}, \vec{j}), (\vec{r}, \vec{k})$  означает скалярное произведение, а  $|\vec{r}|$  — длину вектора. Если направление в простран-

стве задано единичным вектором  $\vec{e}$ , то Н. к. этого направления равны координатам вектора  $\vec{e}$ :

$$\vec{e} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}.$$

Н. к. удовлетворяют соотношению  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ . Аналогичное понятие рассматривают и в  $n$ -мерном евклидовом пространстве.

Иногда говорят о Н. к. прямой (с заданным направлением) в евклидовом пространстве, понимая под этим Н. к. направляющего вектора прямой.

**НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО** — всякое целое положительное число, т. е. любое число *натурального ряда*.

Первоначальное понятие натурального числа возникло в результате счета различных предметов. Операции сложения и умножения натуральных чисел не выводят за рамки множества этих чисел (операция замкнута на этом множестве). С понятием множества  $N$  натуральных чисел связано понятие *счетного множества*. Натуральные числа линейно упорядочены отношением  $\leq$  (см. *Упорядоченное множество, Отношение, Порядок*). Аксиоматически система натуральных чисел определяется системой аксиом Пеано.

Лит.: [95, 15, 55].

**НАТУРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ** кривой в евклидовом трехмерном пространстве — уравнения, выражающие кривизну  $k$  и кручение  $\kappa$  кривой как функции длины дуги  $s$ :  $k = k(s)$ ,  $\kappa = \kappa(s)$ . Все входящие в эти уравнения величины ( $k$ ,  $\kappa$ ,  $s$ ) имеют внутренний смысл (натуральны), т. е. не зависят от системы координат во вмещающем пространстве. Справедлива теорема: для любых непрерывных функций  $k = k(s)$ ,  $k(s) > 0$ ,  $\kappa = \kappa(s)$  существует единственная с точностью до положения в пространстве кривая, кривизна и кручение которой равны  $k(s)$  и  $\kappa(s)$  соответственно.

Лит.: [61, 71].

**НАТУРАЛЬНЫЙ ЛОГАРИФМ** — логарифм, основанием которого является трансцендентное число  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\dots$  (обозначается  $\ln$ ).

Н. л. связывают с именем Непера, однако таблицы логарифмов были составлены почти одновременно и независимо друг от друга несколькими математиками (Непер, Бригг, Бюрги и др.). Н. л. иначе называют гиперболическими логарифмами; иногда их также неправильно называют неперовыми логарифмами. Н. л. имеют большое применение в высшей математике, а также в смежных с математикой дисциплинах.

См. также: *Логарифм, e-Число*.

**НАТУРАЛЬНЫЙ РЯД** — в первоначальном понимании это последовательность целых положительных чисел, расположенных в порядке их возрастания:  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ . Всякое множество, эквивалентное множеству чисел Н. р., называется *счетным*. Например, множество положительных четных чисел является счетным, так как оно эквивалентно всему множеству чисел Н. р. При более строгом подходе к понятию Н. р. дается аксиоматическое его определение, выраженное в аксиомах (см. *Пеано аксиомы*).

Лит.: [42], [55], [86].

**«НАЧАЛА» ЕВКЛИДА** — сочинение по элементарной математике древнегреческого математика Евклида (III в. до н. э.). «Н.» Е. состоят из 13 книг и

представляют собой систематическое изложение греческой математики того периода по различным разделам: элементарной геометрии, теории чисел, алгебры, теории измерения геометрических величин, элементов теории пределов.

«Н.» Е. — превосходный образец построения геометрии дедуктивным методом. Элементарная геометрия, изучавшаяся в средних школах в течение длительного времени во многих странах мира; мало чем отличалась от геометрии, изложенной в «Н.» Е. Ряд определений (точки, прямой, отрезка и др.) дается теперь иначе, так как геометрия в средней школе в нашей стране теперь строится на теоретико-множественной основе с использованием понятия отображения одного множества точек в другое и понятия расстояния между двумя точками. Некоторые аксиомы из «Н.» Е. при более строгом построении курса геометрии уже не являются аксиомами, а являются теоремами; например, Евклид принимал за аксиому предложение: «Все прямые углы равны». Теперь это предложение доказывается, причем термин «равенство углов» заменяется более строгим понятием «конгруэнтности» их.

Существует мнение о том, что ряд книг, входящих в «Н.» Е., были написаны не Евклидом, а другими математиками; например, книги X и XIII, по мнению голландского математика Ван-дер-Вардена, были написаны древнегреческим математиком Теэтетом. Многие теоремы и утверждения, изложенные в «Н.» Е., были известны математикам задолго до Евклида.

Гре́ч. *отомета* — азбука, элементы, основы, начала.

См. также: *Геометрия, Аксиома, Дедукция, Неевклидовы геометрии, Расстояние, Непротиворечивость системы аксиом, Независимость системы аксиом, Полнота системы аксиом.*

Лит.: [57, 33, 95].

**НАЧАЛО КООРДИНАТ** — точка пересечения осей координат. Н. к. называется также началом отсчета (координат) или начальной точкой. Обозначается Н. к. обычно буквой *O* — первой буквой латинского слова *Origo* — начало.

См. также: *Координаты, Полярные координаты, Бариецентрические координаты.*

**НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ** — состояние изучаемого процесса в какой-либо момент времени, принимаемый за начальный. Если процесс описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f \left( t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \right),$$

то Н. у. определяются значениями функций:

$$y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \text{ при } t = t_0.$$

**НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ** — прикладная геометрическая дисциплина, основанная на методах *проективной геометрии*, изучающая способы изображения пространственных фигур на плоскости и решение пространственных задач на плоскости при помощи этих изображений. Особое значение в Н. г. имеют чертежи, получаемые при помощи проектирования данной фигуры на плоскость, т. е. проекционные чертежи.

См. также: *Проекция, Перспектива, Чертеж, Эпюр, Аксонометрия.*

Лит.: [92, 95].

**НЕВЫРОЖДЕННАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА** — *квадратичная форма*, матрица которой является невырожденной матрицей.

**НЕВЫРОЖДЕННАЯ МАТРИЦА** — см. *Неособенная матрица.*

**НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ** — в широком смысле все геометрические системы (геометрии), отличные от геометрии Евклида. Однако чаще всего под Н. г. (в узком смысле) понимают геометрию *Лобачевского* и геометрию *Римана*.

**НЕЗАВИСИМОСТЬ** системы аксиом — одно из основных требований (условий, свойств) *непротиворечивой системы аксиом*. Непротиворечивая система аксиом  $\{A_i\} i = 1, 2, \dots, n$  называется независимой, если никакая из аксиом  $A_i$  этой системы не является следствием других аксиом этой же системы. Другими словами, Н. системы аксиом сводится к минимальности числа аксиом этой системы. Доказательство Н. системы аксиом сводится к доказательству независимости каждой аксиомы  $A_i$  от всех остальных аксиом данной системы. Доказательство же независимости аксиомы  $A_i$  от всех остальных сводится к доказательству *непротиворечивости* всей системы аксиом  $\{A_i\}'$ , в которой аксиома  $A_i$  заменена аксиомой  $\bar{A}_i$ , противоположной аксиоме  $A_i$ . Например, доказательство независимости аксиомы параллельности прямых от всех остальных аксиом геометрии Евклида сводится к доказательству непротиворечивости геометрии Лобачевского.

Вопрос о Н. непротиворечивой системы аксиом рассматривается в основаниях геометрии, в математической логике.

См. также: *Аксиома, Непротиворечивость, Полнота системы аксиом.*

**НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.** Пусть  $X, Y$  — случайные величины и  $f(t), g(t)$  — соответственно дифференциальные законы распределения этих величин. Пусть  $h(t_1, t_2)$  — дифференциальный закон распределения пары  $X, Y$ :  $h(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 H}{\partial t_1 \partial t_2}$  и  $H(t_1, t_2) = P(X < t_1, Y < t_2)$ .

Если условное распределение случайной величины  $X$  при условии, что  $Y = y_0$ , не зависит от  $y_0$  и совпадает с заданным (безусловным) распределением  $X$ , то с. в.  $X$  и  $Y$  называются независимыми (обладают свойством Н. с. в.). Дифференциальная функция условного распределения случайной величины  $X$  при условии  $Y = y_0$  может быть представлена в виде

$$f_{Y=y_0}(t) = Mh(t_1, y_0),$$

где  $\frac{1}{M} = \int h(t_1, y_0) dt_1$ .

Для независимых случайных величин  $X, Y$  справедливо равенство  $h(t_1, t_2) = f(t_1)g(t_2)$ .

Система случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  называется попарно независимой, если каждая пара  $X_i, X_j, i, j = 1, 2, \dots, n$  является независимой.

**НЕЙЛЯ ПАРАБОЛА** — синоним термина *полукубическая парабола*. Н. п. названа по имени английского математика У. Нейля, нашедшего длину ее дуги.

**НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ** для какого-либо утверждения (предложения, высказывания)  $B$  — всякое утверждение  $A$ , из которого следует  $B$  ( $A \Rightarrow B$ ) и которое само следует из  $B$ , т. е.  $B$  — необходимое для  $A$  и в

то же время утверждение (условие)  $B$  является достаточным для выполнения утверждения  $A$  ( $B \Rightarrow A$ , т. е.  $A$  — следствие  $B$ ,  $B$  влечет  $A$ ). Если  $B$  есть Н. и д. у. для  $A$ , то символически это обозначают двойной импликацией:  $A \Leftrightarrow B$ . Н. и д. у. для какого-либо утверждения может быть не одно, а несколько.

Например, для того чтобы тело было шаром, необходимо и достаточно, чтобы его сечение любой плоскостью было кругом. Теоремы Пифагора, прямая и обратная, обе верны. Следовательно, их можно объединить в одно утверждение: для того чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение:  $a^2 + b^2 = c^2$ , где  $a, b, c$  — длины его сторон.

Выражение «необходимо и достаточно» в формулировках теорем часто заменяют выражением «в том и только в том случае», «те и только те», «если и только если», «тогда и только тогда, когда».

Понятие о Н. и д. у. является одним из важнейших понятий в математике.

См. также: *Необходимое условие, Достаточное условие, Теорема, Обратная теорема, Необходимое условие экстремума.*

**НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ** для какого-либо утверждения (предложения, высказывания) — всякое утверждение, без которого данное утверждение заведомо неверно. Иначе, если истинные высказывания  $A$  и  $B$  связаны импликацией  $A \Rightarrow B$ , то  $B$  — необходимое условие для  $A$ ,  $A$  — достаточное для  $B$ . Если функция дифференцируема, то она, как известно, непрерывна; следовательно, непрерывность функции является н. у. для ее дифференцируемости, но недостаточным: например, функция  $y = |x|$  в начале координат непрерывна, но не имеет в указанной точке производной.

См. также: *Обратная теорема, Теорема, Необходимое условие экстремума, Необходимое и достаточное условие.*

**НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА:** 1°. Н. у. э. функции одной переменной  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  состоит в том, чтобы производная  $f'$  в этой точке была равна нулю ( $f'(x_0) = 0$ ) или не существовала.

2°. Н. у. э. функции нескольких переменных в точке  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  состоит в том, чтобы все частные производные функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  обращались в этой точке в нуль:

$$\frac{\partial u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i} = 0; i = 1, 2, \dots, n$$

или хотя бы одна из частных производных не существовала.

**НЕОПРЕДЕЛЕННАЯ ФОРМА** — квадратичная форма  $\sum_{j=1}^i \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i x_j$  с действительными коэффициентами, которая при действительных значениях переменных может принимать как положительные, так и отрицательные значения; например,  $x_1^2 - x_2^2$ .

**НЕОПРЕДЕЛЕННОЕ УРАВНЕНИЕ** — уравнение, содержащее более одного неизвестного (одной переменной). Н. у., как правило, имеет бесконечное множество решений. Обычно ищут решения Н. у. в целых или рациональных числах.

См. также: *Диофантовы уравнения, Уравнение.*



**НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ.** Иногда при формальной подстановке числа  $a$  в функцию  $F(x)$  и при дальнейшем вычислении значения функции приходят к выражениям вида:

$$\text{а) } \frac{0}{0}; \quad \text{б) } \frac{\infty}{\infty}; \quad \text{в) } \infty - \infty; \quad \text{г) } 0^0; \quad \text{д) } 1^\infty; \quad \text{е) } \infty^0.$$

Эти выражения с точки зрения алгебры являются бессмыслицей, но, исходя из понятий математического анализа, удобно придавать им в некоторых случаях определенный смысл. Именно, если функция  $F(x)$  непрерывна в некоторой окрестности точки  $x = a$ , исключая саму точку  $a$ , то под  $F(a)$  понимают

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x).$$

Вычисление этого предела есть раскрытие неопределенности (см. также Лопиталю правило). Функцию  $F(x)$ , имеющую в точке  $x = a$  неопределенность одного из указанных выше типов, можно изменить так, чтобы неопределенность новой функции имела вид а)  $0/0$ , а именно:

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty, \quad F(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \quad \left( \frac{\infty}{\infty} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varphi(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\psi(x)} = 0, \quad F(x) = \frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}} \quad \left( \frac{0}{0} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty, \quad F(x) = \varphi(x) - \psi(x) \quad (\infty - \infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} e^{-\psi(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} e^{-\varphi(x)} = 0, \quad e^{F(x)} = \frac{e^{-\psi(x)}}{e^{-\varphi(x)}} \quad \left( \frac{0}{0} \right);$$

$$\text{г) } \varphi(x) > 0 \quad (x \neq 0), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0, \quad F(x) = (\varphi(x))^{\psi(x)} \quad (0^0),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\ln \varphi(x)} = 0, \quad \ln F(x) = \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\ln \varphi(x)}} \quad \left( \frac{0}{0} \right);$$

$$\text{д) } \varphi(x) > 0 \quad (x \neq a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1, \quad F(x) = \varphi(x)^{\psi(x)} \quad (1^\infty);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\psi(x)} = 0, \quad \ln F(x) = \frac{\ln \varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}} \quad \left( \frac{0}{0} \right);$$

$$\text{е) } \varphi(x) > 0 \quad (x \neq a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0, \quad F(x) = \varphi(x)^{\psi(x)} \quad (\infty^0);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\ln \varphi(x)} = 0, \quad \ln F(x) = \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\ln \varphi(x)}} \quad \left( \frac{0}{0} \right).$$

**НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ** — совокупность всех *первообразных* функций для данной функции  $f(x)$  — обозначается  $\int f(x) dx$ . Разность любых двух таких функций равна константе. Н. и. связан с *определенным интегралом Ньютона — Лейбница* формулой

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$  — одна из первообразных, и  $f(x)$  — непрерывная функция.

Н. и. обладает следующими свойствами: 1)  $\int af(x) dx = a \int f(x) dx$ , где  $a$  — произвольное число; 2)  $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$  (свойство аддитивности Н. и.); 3)  $\int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x) df(x)$  (интегрирование по частям).

Достаточным (но не необходимым) условием существования Н. и. является непрерывность данной функции  $f(x)$  на рассматриваемом интервале.

**НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОД** — метод, применяемый для нахождения коэффициентов выражения в том случае, когда общий вид этого выражения заранее известен. Так, всякая *рациональная функция* может быть разложена на сумму простых дробей. Пусть требуется найти такое разложение, например, для функции  $(3x^2 - 1)/x(x^2 - 1)$ .

Запишем эту функцию в виде

$$\frac{3x^2 - 1}{x(x^2 - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1},$$

где коэффициенты  $A, B, C$  подлежат определению. После освобождения от знаменателя и группировки членов получим:

$$(A + B + C)x^2 + (B - C)x - A = 3x^2 - 1.$$

Так как последнее равенство должно выполняться при всех значениях переменной  $x$ , то коэффициенты при одинаковых степенях буквы  $x$  в левой и правой частях должны быть равны, откуда  $A + B + C = 3$ ,  $B - C = 0$ ,  $A = 1$ . Следовательно,  $A = B = C = 1$ , откуда имеем:

$$\frac{3x^2 - 1}{x(x^2 - 1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Н. к. м. широко применяется в математике: при интегрировании рациональных функций, при разложении многочлена на множители и в других вопросах.

**НЕОСОБЕННАЯ МАТРИЦА** — квадратная матрица  $A = \|a_{ij}\|$  порядка  $n$  (число строк равно числу столбцов), определитель которой  $\det A$  отличен от нуля. Ранг Н. м.  $A$  порядка  $n$  равен  $n$ .

Если ранг квадратной матрицы меньше  $n$ , т. е.  $\det A = 0$ , то матрица называется *особенной*. Всякая Н. м.  $A$  имеет единственную обратную матрицу  $A^{-1}$ , т. е. такую, что  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ , где  $E$  — *единичная матрица*, определяющая в  $n$ -мерном пространстве тождественное *линейное преобразование*. Всякая Н. м.  $A$  в  $n$ -мерном пространстве задает невырожденное линейное преобразование в любом базисе. Формулы преобразования координат также определяются Н. м. Н. м. называется также невырожденной матрицей или *регулярной*.

**НЕПЕРА ПАЛОЧКИ** — одно из простейших полумеханических приспособлений для выполнения операции умножения многозначных чисел. Н. п. состоят из набора нескольких полосок (картонных, деревянных или каких-либо

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		6	7	2	3
0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9	1	0/6	0/7	0/2	0/3
0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8	2	1/2	1/4	0/4	0/6
0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7	3	2/6	2/3	1/6	0/9
0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6	4	3/4	2/8	1/8	1/2
0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5	5	4/0	3/5	2/5	1/5
0/0	0/6	1/2	1/6	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4	6	5/6	4/2	1/2	1/6
0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3	7	6/4	5/9	2/4	2/1
0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/6	5/6	6/4	7/2	8	7/6	6/4	3/6	2/4
0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1	9	8/4	7/3	4/8	3/7

Рис. 14

других), на которых изображены цифры, как указано на рисунке 14, а, где сверху каждой полоски стоит цифра от 0 до 9, а ниже в клеточках, разделенных диагональю, записаны все произведения этих цифр на все однозначные числа. Цифра десятков полученного двузначного произведения расположена в клетке слева над диагональю (выше цифры единиц произведения), а цифра единиц произведения — под диагональю той же клетки.

Для выполнения действия умножения может потребоваться несколько одинаковых полосок.

Лит.: [95].

**НЕПЕРОВО ЧИСЛО** — число  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = 2,7182818284... .$

Н. ч. является трансцендентным числом (впервые это доказано французским математиком Ш. Эрмитом в 1873 г.). Н. ч. играет большую роль в теоретических вопросах математики и в приложениях. Название числа в честь шотландского математика Непера мало обоснованно.

См. также: *e-Число*, *Натуральный логарифм*.

**НЕПЕРОВЫ АНАЛОГИИ** — следующие формулы сферической тригонометрии:

$$\operatorname{tg} \frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\widehat{C}}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\widehat{C}}{2}; \quad (*)$$

$$\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}{\sin \frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}{\cos \frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2}. \quad (**)$$

Эти формулы удобны для логарифмирования при «решении» сферических треугольников по данным двум сторонам и величине угла  $C$  между ними (\*) или по данной стороне  $c$  и величинам углов  $A$  и  $B$ , прилежащих к ней (\*\*). Формулы

(\*) и (\*\*) аналогичны; первые из них были получены английским математиком Г. Бриггом, вторые — шотландским математиком Д. Непером в виде пропорции.

Греч. *αναλογία* — пропорция.

**НЕПЕРОВЫ ЛОГАРИФМЫ** — синонимы термина *натуральные логарифмы*. Название Н. л. исторически неоправданно.

См. также: *Логарифм*.

**НЕПОДВИЖНАЯ ТОЧКА** преобразования — точка, которая в рассматриваемом преобразовании соответствует сама себе (переходит сама в себя). Например, в преобразовании симметрии в евклидовой геометрии с данной осью симметрии  $l$  каждая точка оси симметрии является Н. т., т. е. «остается на месте» (инвариантна) в этом преобразовании; в преобразовании гомотетии  $H(S, k)$  с центром  $S$  и коэффициентом  $k \neq 0$  точка  $S$  есть Н. т.

Кроме Н. т., рассматривают также неподвижные прямые, неподвижные плоскости, неподвижные окружности (например, при инверсии) и т. д. Неподвижные прямые могут быть как точно-инвариантные, когда каждая точка прямой преобразуется в себя, так и не являющиеся точно-инвариантными, когда прямая остается неподвижной в целом, но каждая ее точка (или некоторое множество ее точек) преобразуется в другие точки, лежащие на той же прямой. Так, ось симметрии в евклидовой геометрии есть точно-инвариантная прямая, в то время как прямые, перпендикулярные оси симметрии, не являются точно-инвариантными.

Н. т., неподвижная прямая, неподвижная плоскость и т. д. называются неподвижными или двойными элементами преобразования.

В термине Н. т. может быть сформулирован ряд глубоких теорем анализа и дифференциальных уравнений. Так, теорема существования и единственности решения уравнения  $y' = f(x, y)$ ,  $y(0) = 0$  при выполнении обычных условий эквивалентна утверждению, что у преобразования

$$z_x = \int_0^x f(x, y(x)) dx, \quad y(x) \rightarrow z(x)$$

в пространстве функций есть единственная Н. т. — искомая функция  $y(x)$ . Имеет место знаменитая теорема о Н. т. в *топологии*. Сформулируем ее частный случай. При любом непрерывном отображении круга  $x^2 + y^2 \leq 1$  в себя существует по крайней мере одна Н. т.

**НЕПОЗИЦИОННАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ** — система счисления, в которой числовые знаки, стоящие на разных местах (позициях) в аддитивной записи *натурального числа*, обозначали одну и ту же цифру или одно и то же число. У разных народов были различные Н. с. с. К таким Н. с. с. относились записи чисел в виде черточек, обозначающих знак «1». В натуральном числе было столько черточек, сколько единиц содержалось в этом числе. Примерами Н. с. с. являются также египетская иероглифическая система нумерации, римская система счисления, алфавитные системы счисления и др. Кроме аддитивной формы записи натуральных чисел в Н. с. с., где использовалось понятие сложения, встречалась также мультипликативная форма записи натуральных чисел; так, в старокитайской системе счисления использовалась операция умножения; например, числа 20 и 30 записывались как 2, 10 и 3, 10. В римской же системе счисления эти чис-

ла были бы записаны по аддитивному принципу (с использованием понятия сложения): XX и XXX.

См. также: *Позиционная система счисления, Нумерация, Абак, Арабские цифры, Римские цифры, Систематические дроби, Система счисления.*

Лит.: [31, 95].

**НЕПОЛНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФИГУРЫ** — изображение (чертеж), на котором нет достаточных инцидентий для определения других остальных инцидентий оригинала. Позиционные задачи (на определение изображения точек пересечения двух фигур-оригиналов) на Н. и. однозначно (вполне определенно, эффективно) решены быть не могут.

См. также: *Полное изображение фигуры, Аксонометрия, Проекция, Чертеж.*  
Лит.: [92].

**НЕПОЛНОЕ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ** — *квадратное уравнение*, в котором равен нулю коэффициент при неизвестном (переменной) в первой степени или свободный член, или оба эти числа одновременно равны нулю. Следовательно, Н. к. у. имеет один из следующих видов:

$$ax^2 + bx = 0 \ (ab \neq 0), \text{ или } ax^2 + c = 0 \ (ac \neq 0), \text{ или } ax^2 = 0 \ (a \neq 0).$$

**НЕПОЛНОЕ ЧАСТНОЕ:** 1°. Н. ч. в теории чисел (в арифметике) — целая часть отношения двух целых чисел  $a$  и  $b$ , из которых  $|a| > |b|$  и  $a$  не делится на  $b$ . Например, Н. ч. отношения  $7/3$  равно 2, число 7 — делимое, число 3 — делитель, остаток от деления 7 на 3 равен 1. Делимое равно Н. ч., умноженному на делитель, сложенному с остатком.

2°. Н. ч. в алгебре (многочленов) — многочлен  $q(x)$ , который получается при делении многочлена  $f(x)$  на  $g(x) \neq 0$  из кольца  $P[x]$  и удовлетворяет соотношению

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

где степень  $r(x) \neq 0$  меньше степени  $g(x)$ . Многочлен  $r(x)$  называется остатком от деления  $f(x)$  на  $g(x)$ . Иногда нахождение Н. ч.  $q(x)$  от деления  $f(x)$  на  $g(x)$  называется делением с остатком  $r(x) \neq 0$ . Для любых двух многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  из кольца многочленов  $P[x]$  над полем  $P$  многочлены  $q(x)$  и  $r(x)$  определяются однозначно.

См. также: *Евклида алгоритм, Деление, Частное от деления.*

Лит.: [95].

**НЕПРАВИЛЬНАЯ ДРОБЬ:** 1°. Н. д. в теории чисел (арифметике) — обыкновенная дробь, у которой модуль числителя больше или равен модулю знаменателя. Например,  $3/2$ ,  $-8/8$ . Н. д. можно записать в виде числа, состоящего из

целой и дробной частей (смешанное число):  $3/2 = 1 + 1/2 = 1\frac{1}{2}$ , и наоборот,

всякое смешанное число можно записать в виде Н. д., например:  $2\frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3}{7} =$

$$= \frac{17}{7}.$$

2°. Н. д. в алгебре (многочленов) — отношение двух многочленов  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , где степень многочлена  $f(x)$  не ниже степени многочлена  $g(x)$ .

См. также: *Дробь, Правильная дробь.*

**НЕПРЕРЫВНАЯ ГРУППА** (или топологическая группа) — группа, множество элементов которой образует *топологическое пространство*: операции группового умножения и перехода к обратному элементу непрерывны в топологии пространства. Например, множество рациональных чисел на прямой, взятых в их естественной метрике, образуют Н. г. Одним из глубоких результатов теории Н. г. является теорема: Н. г., являющаяся в то же время *многообразием*, есть группа Ли.

**НЕПРЕРЫВНАЯ ДРОБЬ** — выражение вида

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}},$$

где  $a_0$  — любое целое число (не обязательно положительное),  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — натуральные числа, называемые неполными частными или элементами данной Н. д. Н. д. кратко обозначается так:  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$  или  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  в зависимости от того, конечная ли Н. д. или бесконечная.

Всякое рациональное число может быть представлено в виде конечной Н. д., иррациональное же число представляется в виде бесконечной Н. д. (т. е. как предел последовательных конечных непрерывных дробей); эти разложения единственны, при этом квадратические иррациональности разлагаются в периодические Н. д. (см. *Лагранжа теорема*), например:  $\sqrt{2} = [1, 2, 2, \dots, 2, \dots]$  Н. д.  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$ ,  $k < n$ , записанная в виде несократимой дроби  $P_k/Q_k$ , называется подходящей дробью порядка  $k$ . Числитель и знаменатель подходящей дроби связаны рекуррентными формулами:

$$P_{k+1} = a_{k+1}P_k + P_{k-1}, \quad Q_{k+1} = a_{k+1}Q_k + Q_{k-1}.$$

Для каждой бесконечной Н. д. существует единственный предел:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_k}{Q_k} = \alpha,$$

который называется значением этой Н. д. Н. д. используется для приближений иррациональных чисел рациональными — подходящими дробями. Например, приближенные значения числа  $\pi$  есть подходящие дроби  $22/7$  и  $355/113$ . Французский математик Лиувилль доказал, что если  $\alpha$  — алгебраическое число степени  $n > 1$ , то можно подобрать такую постоянную  $C$ , что для любой рациональной дроби  $x/y$  будет выполняться неравенство  $|\alpha - x/y| > C/y^n$ . Н. д. также называют и выражение вида:

$$a_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}},$$

которое обозначают кратко так:  $[a_0; a_v / b_v]^\infty$ . Дробь  $a_n/b_n$  называется  $n$ -м звеном Н. д.,  $a_n$  и  $b_n$  — членами  $n$ -го звена Н. д., а числа  $a_1, a_2, \dots$  — частными числителями Н. д., а числа  $b_1, b_2, \dots$  — частными знаменателями Н. д.

Термин Н. д. (лат. fractio) был впервые введен Л. Эйлером (1737).

Лит.: [91].

**НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ** в точке  $P_0 (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  — функция  $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющая условию: для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta$ , что для всех точек  $P (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , подчиняющихся условиям:  $|x_i - x_i^0| < \delta$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , выполняется неравенство  $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$ . Другими словами,  $f(P)$  непрерывна в точке  $P_0$ , если при стремлении  $P \rightarrow P_0$  выражение  $f(P)$  стремится к  $f(P_0)$ . Функция, непрерывная в каждой точке множества  $E$ , называется Н. ф. на множестве  $E$ .

График Н. ф. одного переменного на связном множестве есть непрерывная линия, которая, однако, может сильно отличаться от наивного представления о непрерывной кривой. Так, существуют Н. ф., нигде не имеющие производной. Их графики представляют собой непрерывные кривые, нигде не имеющие касательной. Пример такой функции впервые был построен немецким математиком К. Вейерштрассом.

Н. ф. обладают многими важными свойствами: Н. ф. на компактном множестве достигает своего наименьшего и наибольшего значения; сумма, разность, произведение Н. ф. есть Н. ф.; *суперпозиция* Н. ф. также является Н. ф. (см. также *Ролля теорема*). Всякую Н. ф.  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  с любой степенью точности можно приблизить многочленом (теорема Вейерштрасса). Н. ф. на компактном множестве является *равномерно непрерывной*. Все эти свойства придают особую важность Н. ф. для многих разделов математики.

По классификации Бэра Н. ф. относятся к нулевому классу. В более абстрактной форме Н. ф. рассматриваются не только на множествах в пространстве переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , но и на произвольном множестве *топологического пространства*. Примеры: все многочлены, а также функции  $\exp x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  являются Н. ф. на всей числовой прямой; функция  $\operatorname{tg} x$  непрерывна всюду, кроме точек  $x = (\pi/2)(2k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , где она не определена;  $\lg x$  непрерывна во всей области определения  $]0; \infty[$ ,  $y = x \sin(1/x)$  [ $y(0) = 0$ ] непрерывна на всей прямой, однако в точке  $x = 0$  не имеет производной.

Лит.: [4, 87, 94].

**НЕПРЕРЫВНОСТИ АКСИОМЫ** — аксиомы, выражающие в той или иной форме непрерывность прямой линии. Одной из Н. а. является аксиома Дедекинда: если все точки отрезка  $AB$  разбить на два класса, каждый из которых не пуст, так, что: 1) каждая точка отрезка  $AB$  принадлежит только одному классу, точка  $A$  принадлежит первому классу, точка  $B$  — второму классу; 2) каждая точка  $C$  первого класса, отличная от  $A$ , лежит между точкой  $A$  и произвольной точкой  $D$  второго класса; 3) каждая точка  $D$  второго класса, отличная от  $B$ , лежит между произвольной точкой  $C$  первого класса и точкой  $B$ ; то существует такая точка  $E$ , что она принадлежит любому отрезку  $[C; D]$ , где  $C$  и  $D$  — произвольные точки первого и второго классов соответственно. Сама точка  $E$  может принадлежать или первому, или второму классу точек. Можно доказать, что

**точка  $E$**  (граничная точка или *точка дедекиндова сечения*) единственная. Аналогично аксиома Дедекинда формулируется для прямой и луча. Иногда вместо неопределяемого термина «между» используют также неопределяемые термины «предшествует», «лежит левее», «лежит правее».

Вместо одной Н. а. — аксиомы Дедекинда — иногда используют равносильные ей две аксиомы: аксиому полноты (любое множество вложенных друг в друга отрезков имеет общую точку) и *Архимеда аксиому* или другие равносильные аксиомы.

Н. а. позволяет установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек прямой и множеством всех действительных чисел. Н. а. дает возможность доказать ряд теорем элементарной геометрии: пересечение прямой, проходящей через внутреннюю точку круга, с его окружностью только в двух точках, пересечение двух окружностей, расположенных определенным образом на плоскости, позволяют установить существование длины отрезка и решить обратную задачу при измерении отрезков: доказать теорему о том, что для всякого действительного числа  $\alpha$  существует отрезок, длина которого равна этому числу  $\alpha$ . См. *Длина*.

**НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ** — свойство функции быть непрерывной. См. *Непрерывная функция*.

**НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ СПРАВА** (соответственно слева) — функция  $y = f(x)$  ( $f: X \rightarrow R$ ,  $a \in R$ ) называется непрерывной справа (слева) в точке  $x = a$ , если *бесконечно малому* приращению  $\Delta x > 0$  (соответственно  $\Delta x < 0$ ) независимой переменной соответствует бесконечно малое приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

или, что равносильно, если  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$  (соответственно  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$ )

т. е. предел функции справа (соответственно слева), равен значению функции  $f(a)$ .

**НЕПРИВОДИМОЕ УРАВНЕНИЕ** над полем  $P$  — алгебраическое уравнение  $f(x) = 0$ , где  $f(x)$  — *неприводимый многочлен* над тем же полем  $P$ . Например,  $x^2 + 1 = 0$  — Н. у. в поле действительных чисел, но приводимое над полем комплексных чисел. Если  $f(x)$  — *приводимый* многочлен, то разложение его на множители

$$f(x) = p(x)q(x)$$

позволяет свести уравнение  $f(x) = 0$  к эквивалентной совокупности уравнений

$$p(x) = 0, q(x) = 0$$

меньшей степени и, следовательно, более простых. Продолжая этот процесс, можно свести уравнение  $f(x) = 0$  к эквивалентной совокупности неприводимых уравнений.

**НЕПРИВОДИМЫЙ МНОГОЧЛЕН** над заданным полем  $P$  — многочлен, не разлагающийся на множители — многочлены степени выше нуля с коэффициентами из поля  $P$ . Во всяком *алгебраически замкнутом* поле единственными Н. м. являются многочлены степени не выше первой.



**Примеры.** Над полем действительных чисел всякий  $N. м.$  есть либо константа, либо многочлен первой степени, либо квадратный трехчлен с *дискриминантом*, меньшим нуля; в поле рациональных чисел существует  $N. м.$  любой (сколько угодно высокой) степени.

Роль  $N. м.$  в *кольце многочленов*  $P[x]$  аналогична роли простых чисел в кольце целых чисел. Справедлива основная теорема теории делимости многочленов, аналогичная основной теореме арифметики в кольце целых чисел.

Как видно из примеров, многочлены, неприводимые над одним полем, могут быть приводимыми над другим полем.

Ввиду громоздкости общих методов практического решения вопроса о приводимости или неприводимости многочленов в разное время различными математиками было найдено и доказано довольно большое число частных критериев неприводимости многочленов. Однако все эти критерии содержали лишь условия, достаточные (а не необходимые) для неприводимости многочленов, т. е. позволяли устанавливать неприводимость многочленов только того или иного весьма частного типа.

Лит.: [42, 47].

**НЕПРОТИВОРЕЧИВАЯ СИСТЕМА** уравнений — то же, что и совместная система уравнений.

**НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ** системы аксиом — одно из важнейших требований (условий, свойств) системы аксиом. Система аксиом называется непротиворечивой, если из нее нельзя логически вывести два взаимно исключающих друг друга предложения. Если система аксиом не обладает этим свойством, то она называется противоречивой. Противоречивая система аксиом не может быть пригодной для обоснования научной дисциплины.

Доказательство  $N.$  системы аксиом сводится к построению модели (реализации, интерпретации), т. е. такому набору элементов, играющих роль основных объектов (но уже другой природы), для которых устанавливаются основные отношения между ними, в точности отображающие основные отношения между основными объектами первоначальной системы аксиом.  $N.$  системы аксиом называется также совместностью системы аксиом.

См. также: *Аксиома, Независимость.*

**НЕРАВЕНСТВО** 1°.  $N.$  числовое — высказывание вида  $a < b$  или  $a \leq b$ , где отношение  $<$  — отношение строгого порядка, а отношение  $\leq$  — отношение нестрогого порядка на некотором множестве чисел.

2°.  $N.$  с переменной — высказывательная форма вида  $A < B$  или  $A \leq B$ , где  $A$  или  $B$  — высказывательная форма.

Множество значений переменной  $x$  (или нескольких переменных), при которых высказывательная форма  $A < B$  или  $A \leq B$  истинна, называется множеством истинности этой формы или решением  $N.$  с п.

Иногда  $N.$  с п. определяют менее формально, но более, может быть, доступно:  $N.$  — два выражения, соединенные знаком неравенства ( $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$  — знаки  $N.$ ).  $N.$ , содержащее переменную, называется  $N.$  с переменной.

$N.$ , содержащее знак  $>$  или  $<$ , называют строгим;  $N.$ , содержащее знак  $\geq$  или  $\leq$ , называют нестрогим. Отношения «меньше» и «больше»

для чисел  $a$  и  $b$  взаимосвязаны: если  $a > b$ , то  $b < a$ ; если  $a < b$ , то  $b > a$ . К обеим частям истинного (верного) числового неравенства можно прибавлять одно и то же число, в результате получим истинное неравенство. Умножая обе части истинного числового  $H. a < b$  на положительное число  $c$ , получим истинное неравенство  $ac < bc$ ; если обе части истинного числового  $H. a < b$  умножить на одно и то же отрицательное число  $c$  и изменить знак неравенства на противоположный, то получится истинное неравенство  $ac > bc$ .

Свойства  $H.$  во многом аналогичны свойствам уравнений, названия многих  $H.$  аналогичны также названиям соответствующих уравнений, например:

$ax + b = 0, a \neq 0$  — уравнение первой степени;

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$  — уравнение второй степени (квадратное уравнение);

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

$a_0 \neq 0$  — алгебраическое уравнение  $n$ -й степени с одной переменной;

$\lg x = 2$  — логарифмическое (трансцендентное) уравнение.

$ax + b > 0, a \neq 0$  —  $H.$  первой степени;

$ax^2 + bx + c > 0, a \neq 0$  или  $ax^2 + bx + c < 0$  —  $H.$  второй степени (квадратичное  $H.$ );

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n > 0$  (или  $< 0$ ),  $a_0 \neq 0$  — алгебраическое  $H.$   $n$ -й степени с одной переменной;

$\lg x > 2$  ( $\lg x < 2$ ) — логарифмическое (трансцендентное)  $H.$

Иногда в математике используется особый знак  $H.$   $>>$  (значительно больше) или  $<<$  (значительно меньше). Понятие  $H.$  широко используется в оценочных (приближенных) формулах во многих разделах математики.

См. также: *Гёльдера неравенство, Минковского неравенство.*

Лит.: [95, 13, 42, 14, 45].

**НЕСОБСТВЕННОЕ ПОДМНОЖЕСТВО** множества  $A$  — пустое множество, а также само множество  $A$ , рассматриваемое как свое подмножество.

**НЕСОБСТВЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ** в геометрии — элементы: точки, прямые, плоскости, которыми пополняются соответственно евклидова (аффинная) прямая, евклидова (аффинная) плоскость и евклидово (аффинное) пространство. Прямая, дополненная несобственной точкой, называется проективной прямой; плоскость, дополненная несобственной прямой, называется проективной плоскостью; пространство, дополненное несобственной плоскостью, называется *проективным пространством*.  $H.$  э. в проективной геометрии иначе называются бесконечно удаленными элементами. Такое название оправдывается, если рассмотреть проектирование из некоторого центра.

Пусть в евклидовой плоскости из центра  $S$  (рис. 15) проектируются точки прямой  $l_1$  на прямую  $l_2$ , тогда точка  $M_1$  отобразится на точку  $M_2$  ( $M_1 \rightarrow M_2$ ), но точка  $M_0$  ( $SM_0 \parallel l_2$ ) ни на какую точку евклидовой прямой  $l_2$  не отобразится (не спроектируется). Чтобы устранить этот недоста-

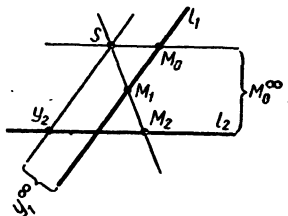


Рис. 15

ток — отсутствие взаимно однозначного соответствия между точками прямых  $l_1$  и  $l_2$ , прямые дополняют несобственными (бесконечно удаленными) точками. При этом дополнении прямых Н. э. точке  $M_0 \in l_1$  будет соответствовать точка  $M_0^\infty \in l_2$ ; аналогично точке  $y_2$  прямой  $l_2$  ( $Sy_2 \parallel l_1$ ) будет соответствовать точка  $y_1^\infty$  прямой  $l_1$ . Все параллельные прямые евклидовой (аффинной) плоскости в расширенной (проективной) плоскости теперь будут иметь одну общую несобственную точку пересечения. Аналогично вводятся несобственная прямая и несобственная плоскость в пространстве. Следует отметить, что, введя несобственные (бесконечно удаленные) элементы в геометрии, мы затем их никак не отличаем от обычных (собственных, конечно удаленных) элементов: собственные и Н. э. считаются в проективной геометрии равноправными.

См. также: *Неевклидовы геометрии, Проективная геометрия, Проективная плоскость, Проективное пространство, Проективные координаты, Дезарга теорема.*

**НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ** — обобщение понятия *Римана интеграла*, для существования которого необходимо, чтобы подынтегральная функция была ограничена, а отрезок интегрирования имел конечную длину. Если функция  $f(x)$  интегрируема на любом конечном отрезке  $[a, b]$  с фиксированной начальной точкой  $a$  и всех  $b > a$ , то

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

если он существует, называется Н. и. функции  $f(x)$  на  $[a; \infty[$  и обозначается  $\int_a^\infty f(x) dx$ . В этом случае говорят также, что Н. и. сходится. Аналогично

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \text{ и } \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b f(x) dx.$$

Если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a + \varepsilon; b]$  при любом достаточно малом  $\varepsilon > 0$  и не ограничена в окрестности точки  $a$ , то по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

если он существует, называется Н. и. функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ . Аналогично для случая, когда  $f(x)$  не ограничена в точке  $b$ . Общий случай Н. и. сводится к рассмотренным с помощью разбиения участка интегрирования на подходящие части. Так, например,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}} dx &= \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}} dx + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}} dx + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}} dx. \end{aligned}$$

Если  $\text{H. н. } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  сходится, то сходится и соответствующий  $\text{H. н.}$  для  $f(x)$  (абсолютная сходимость). Возможны случаи, когда обратное неверно (условная сходимость).  $\text{H. н.}$  находят в математике большое применение. Так, **Фурье преобразование**  $f(t) \rightarrow g(u)$ , имеющее многочисленные применения при решении задач математической физики, определяется с помощью  $\text{H. н.}$ :

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i u t} dt.$$

**Гамма-функция**, широко используемая в аналитической теории чисел и теории специальных функций, определяется формулой  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$ . **Лангаса преобразование** выражается через  $\text{H. н.}$ :  $F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ ,

Лит.: [87].

**НЕСОБСТВЕННЫЙ ЭКСТРЕМУМ** объединяет понятия несобственного максимума и несобственного минимума, о которых см. термины *Максимум* и *Минимум функции*.

**НЕСОВМЕСТНАЯ СИСТЕМА:** 1°  $\text{H. с. уравнений}$  — система уравнений, не имеющая решений. Примеры  $\text{H. с. у.}$ :

$$\sin x + \sin y = 1, x + y = 0 \quad (1), x - y + 5 = 0, x - y + 1 = 0 \quad (2).$$

Из второго уравнения системы (1) следует:  $y = -x$ , откуда  $\sin x + \sin(-x) = \sin x - \sin x = 0$ , что противоречит первому уравнению этой системы.  $\text{H. с. у.}$  системы (2) усматривается непосредственно, так как графиками уравнений этой системы являются несовпадающие параллельные прямые;  $\text{H. с. у.}$  (2) следует и из теоремы Кронекера — Капелли.  $\text{H. с. у.}$  иначе называется *противоречивой системой уравнений*.

2°  $\text{H. с. аксиом}$  — синоним противоречивой системы аксиом.

См. также: *Совместные уравнения, Непротиворечивая система уравнений, Непротиворечивость, Система уравнений, Аксиома*.

**НЕСОИЗМЕРИМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ** — однородные величины, не имеющие общей (целой) меры. Отношение числовых значений  $\text{H. в.}$  есть число иррациональное.

**Примеры.**  $\text{H. в.}$  1. Диагональ квадрата и сторона его —  $\text{H. в.}$  Отношение длины диагонали квадрата к длине его стороны равно иррациональному числу  $\sqrt{2}$ .

2. Площади круга радиуса  $r = 1$  и квадрата со стороной (длиной), равной единице, —  $\text{H. в.}$  Эти величины были известны еще в древности.

См. также: *Соизмеримые величины, Величина*.

**НЕСОКРАТИМАЯ ДРОБЬ** — дробь (обыкновенная), числитель и знаменатель которой — взаимно простые числа, т. е. числитель и знаменатель дроби не имеют общих делителей, отличных от  $\pm 1$ . Примеры  $\text{H. д.}$   $3/8, 4/5$ . Всякую дробь, члены которой имеют *наибольший общий делитель*, отличный от 1, можно привести к  $\text{H. д.}$ , разделив члены дроби на *общий наибольший делитель* (основное свойство дроби).

По аналогии с обыкновенной (простой) Н. д. в алгебре также рассматривают Н. д. вида  $A/B$ , где  $A$  и  $B$  — выражения (числовые или буквенные), не имеющие общих делителей, отличных от  $\pm 1$ ; например,  $2a/b$ ,  $3a^2/(b-a)$  — Н. д. (их часто называют несократимыми алгебраическими дробями).

Понятие Н. д. часто используют при различных преобразованиях дробей в математике.

См. также: *Дробь, Смешанное число, Натуральное число, Целые числа.*

**НЕСЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО** — бесконечное множество, мощность которого больше, чем мощность *счетного множества*. Множество всех действительных чисел, например, является Н. м. (Кантор). Множество всех подмножеств *натурального ряда* также является Н. м. (Кантор).

**НЕЧЕТНАЯ ПОДСТАНОВКА** — *подстановка* (т. е. биекция  $i \rightarrow \varphi(i)$ ,  $i=1\dots n$ )

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

$n$ -й степени, если она разлагается в произведение нечетного числа *транспозиций* или если вторая строка (перестановка первой строки, записанной в нормальном порядке) содержит нечетное число *инверсий*, т. е. случаев, когда за большим числом рассматриваемой пары элементов следует меньшее.

Например: 1) подстановка из пяти элементов:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (35) — \text{Н. п.}$  (одна транспозиция); 2) подстановка из тех же элементов  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4)(4\ 5) — \text{Н. п.}$  (три транспозиции).

Лит.: [47].

**НЕЧЕТНАЯ ФУНКЦИЯ** — функция  $f(f: X \rightarrow R$  или  $f: X \rightarrow C$ ,  $X \subset R$  или  $C$ ), имеющая область определения, симметричную относительно нуля, для которой справедливо равенство  $f(-x) = -f(x)$  для любого  $x$  из области определения, т. е. функция, которая при изменении знака у аргумента изменяет и свой знак. График Н. ф. симметрично расположен относительно начала координат, т. е. имеет центр симметрии — начало координат. Сумма (разность) Н. ф.  $f$  и  $\varphi$  есть снова Н. ф.; произведение двух Н. ф. есть четная функция.

**П р и м е р ы** Н. ф.:  $y = ax$ ,  $a \neq 0$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = x^3$ ,  $y = \arcsin x$ . Множество всех функций не сводится только к четным и нечетным функциям; существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными, например функции:  $y = ax + b$  ( $ab \neq 0$ ),  $y = \arccos x$ ; имеются также функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными также и потому, что для  $x > 0$  они могут быть определены, а для  $x < 0$  не определены, т. е. их область определения не (всегда) симметрична относительно нуля, например функция:  $y = \lg x$ ,  $y = n!$  (« $n$  факториал»-функция, определенная для неотрицательных целых значений  $n$ ),  $y = \frac{x^2 + x}{x + 1}$ .

Существует функция, которая является одновременно четной и нечетной ( $y = 0$ ).

**НЕЧЕТНОЕ ЧИСЛО** — целое число (положительное или отрицательное), не делящееся на 2, Н. ч. может быть записано разными способами, например:

$2n + 1, 2n - 1, 4n \pm 3$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ , где  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел.

Квадрат Н. ч. есть снова Н. ч.; произведение двух Н. ч. также Н. ч.

См. также: *Четные числа, Число, Целые числа, Целое алгебраическое число.*

**НЕЯВНАЯ ФУНКЦИЯ:** Пусть задано уравнение  $F(x, y) = 0$ , т. е. задана функция от двух действительных переменных, и рассматриваются только те значения переменных  $x$  и  $y$ , которые удовлетворяют данному уравнению. Допустим, существует множество  $X$ , что для каждого  $x_0 \in X$  существует также по крайней мере одно число  $y$ , удовлетворяющее данному уравнению  $F = 0$ . Тогда возьмем одно из таких чисел:  $y_0$  и поставим его в соответствие числу  $x_0$ . Тогда мы получим функцию  $f$ , определенную на множестве  $X$ , удовлетворяющую уравнению

$$F(x_0, f(x_0)) = 0 \text{ для любого } x_0 \in X.$$

В таком случае говорят, что задана неявная функция  $f$  на множестве  $X$  уравнением  $F(x, y) = 0$ . Одно и то же уравнение  $F(x, y) = 0$  задает, вообще говоря, не одно, а множество функций (однозначных функций).

**П р и м е р.** Уравнение  $x^2 + y^2 = 1$  задает неявно две функции:

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ и } f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Уравнение  $x^2 - y^2 = 0$  также неявно определяет две функции:  $y = x$  и  $y = -x$  (рис. 16).

Лит.: [73, 87, 95].

**НИЖНИЙ ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ** чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  — самая левая (наименьшая) из *предельных точек* этой последовательности, если последовательность ограничена снизу; Н. п. обозначается символом  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Если последовательность не ограничена снизу, то полагают  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , если последовательность ограничена снизу и не имеет предельных точек (т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ), то полагают  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ . В случае существования конечного или бесконечного предела последовательности Н. п. совпадает с этим пределом. В случае, когда Н. п. конечен, его можно характеризовать следующим образом: число  $l$  будет Н. п. последовательности, если: 1) в любой окрестности  $l$  найдется бесконечно много членов последовательности и 2) при любом  $\varepsilon > 0$  имеется лишь конечное число членов последовательности, меньших  $l - \varepsilon$ .

**П р и м е р ы:** 1) для последовательности  $1, -1/2, 2, -1/3, \dots, n, -1/(n+1), \dots$  имеем:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ; 2) для последовательности  $1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots$  имеем:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ; 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 1)/(n + 2) = \infty$ .

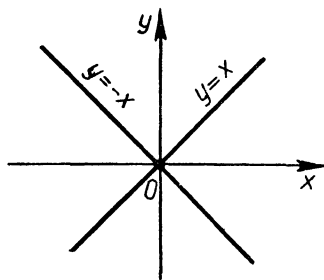


Рис. 16

**НИЖНИЙ ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ**  $f(x)$  в точке  $a$  — наименьший (конечный или бесконечный) из *частичных пределов* функции в точке  $a$ ; обозначается символом  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Это определение сохраняет силу и в тех случаях, когда точка  $a$

заменяется на символы  $\infty$  или  $-\infty$ , а также когда  $x$  стремится к  $a$  справа или слева (односторонний Н. п.).

Примеры: 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} 3 \sin \frac{1}{x} = -3$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^4} = \infty$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cos x = -\infty$ ; 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$ , но  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty$ .

**НИЖНЯЯ ГРАНЬ МНОЖЕСТВА**  $E$ , являющегося подмножеством множества действительных чисел, — наибольшее из чисел, ограничивающих данное множество снизу, т. е. число  $m$ , удовлетворяющее следующим условиям: 1) любое  $x$  из множества  $E$  удовлетворяет неравенству  $x \geq m$ ; 2) для любого  $\varepsilon > 0$  существует в множестве  $E$  такой элемент  $x'$ , что  $x' < m + \varepsilon$ . Н. г. обозначается символом  $\inf E = m$ . У всякого ограниченного снизу множества существует Н. г. Если Н. г. не принадлежит множеству, то она обязательно является *предельной точкой* этого множества.

Примеры: 1)  $E = \{1/2, 2/3, \dots, n/(n+1), \dots\}$ ,  $\inf E = 1/2$ ; 2)  $E$  — отрезок  $[a, b]$ ,  $\inf E = a$ ; 3)  $E$  — множество периметров правильных многоугольников, описанных около круга радиуса  $R$ ,  $\inf E = 2\pi R$ . Если  $E$  не ограничено снизу, то полагают  $\inf E = -\infty$ .

**НИЖНЯЯ ГРАНЬ ФУНКЦИИ**  $y = f(x)$  (или  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ) на данном множестве  $E$  — *нижняя грань множества значений* функции, которые она принимает, когда аргумент  $x$  (или  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ) пробегает множество  $E$ ; Н. г. обозначается символом  $\inf f(x)$  (или  $\inf f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ). Если при некотором  $x'$  из  $E$   $f(x') = \inf_{x \in E} f(x)$ , то Н. г. функции на  $E$  является наименьшим значением функции на множестве  $E$  (говорят, что функция достигает своей Н. г.).

Примеры: 1)  $\inf_{-2 < x < 2} (x^2 - 2) = -2$  — наименьшее значение, принимаемое функцией при  $x = 0$ ; 2)  $\inf_{0 < x < 2} 2^{-x} = \frac{1}{4}$ , но функция не имеет наименьшего значения на  $]0; 2[$ ; 3)  $\inf_{0 < x < 1} (-1/x)$  не существует или условно равен  $-\infty$ , так как функция не ограничена снизу на данном множестве.

**НИКОМЕДА КОНХОИДА** — это *конхоида* прямой  $l$ . Н. к. может иметь различную форму в зависимости от выбора полюса  $O$  и отрезка  $d$ . Н. к. состоит из двух ветвей. Если расстояние полюса  $O$  до данной прямой  $l$  равно  $a$  и данный отрезок имеет длину  $d$ , то уравнение Н. к. в полярных координатах имеет вид:

$$\rho = \frac{a}{\cos \varphi} \pm d,$$

а в прямоугольных декартовых координатах с полюсом в начале координат Н. к. имеет уравнение

$$(x-a)^2 (x^2 + y^2) - d^2 x^2 = 0.$$

Н. к. — алгебраическая кривая 4-го порядка. При  $d > a$ ,  $d = a$ ,  $d < a$  Н. к. соответственно будет иметь в полюсе нулевой узел (рис. 17, а), точку заострения (рис. 17, б) или изолированную точку (рис. 17, в).

Н. к. названа по имени древнегреческого геометра Никомеда, который использовал ее для решения геометрических задач о *трисекции угла* и *удвоении куба*.

Лит.: [74].

*n*-КА — читается энка (кратко пишут: *n*-ка) — упорядоченная совокупность  $n$  элементов множества.

**НОМОГРАММА** — специальный чертеж, предназначенный для решения определенного типа задач вычислительного характера. Так, бывает Н. для решения *приведенных квадратных уравнений*, для определения фокусного расстояния линзы (если известно расстояние до предмета и его изображения), для вычисления площади трапеции, для определения температуры смеси двух жидкостей с одинаковой теплоемкостью и др.

В зависимости от способа изображения Н. и способа задания функциональной зависимости между данными величинами Н. подразделяются на три основных типа: Н. из выравненных точек, Н. сетчатые и Н. транспарантные. Н. из выравненных точек уравнения  $F(u, v, w) = 0$  состоит из трех шкал переменных  $u, v, w$ , область изменения которых задается этими шкалами. Шкалы построены так, что пометки (числа) из них, удовлетворяющие уравнению  $F(u, v, w) = 0$  лежат на одной прямой, откуда происходит и название. На рисунке 18 изображена Н. из выравненных точек для вычисления среднего арифметического двух чисел.

Сетчатая Н. уравнения  $F(u, v, w) = 0$  состоит из трех семейств поме-

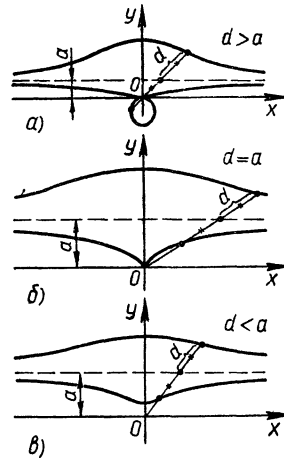


Рис. 17

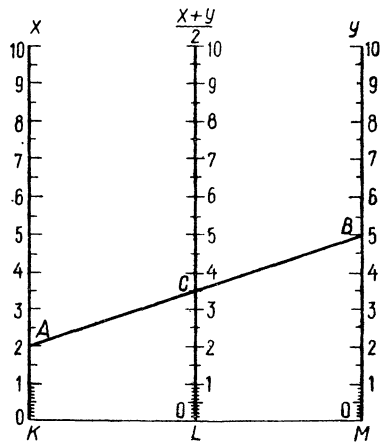


Рис. 18

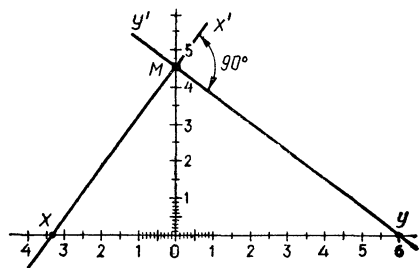


Рис. 19



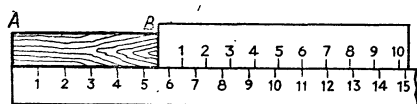


Рис. 20

ченных линий (шкал), изображающих области изменения переменных  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Шкалы построены так, что каждые три из них, пометки (числа) которых удовлетворяют уравнению  $F(u, v, w) = 0$ , пересекаются в одной точке.

Транспарантная Н. в простейшем случае состоит из двух плоских рисунков: основного (состоящего из трех числовых лучей с общим началом 0) и транспаранта (часто изготовленного из прозрачного материала, на котором изображены перпендикулярные прямые  $XX'$  и  $YY'$ ). На рисунке 19 изображена Н. для вычисления среднего геометрического двух чисел  $10/3$  и  $6$ :  $|OM| =$

$$= \sqrt{\frac{10}{3} \cdot 6} \approx 4,5.$$

Примером транспарантной Н. является также логарифмическая линейка, где транспарант совершает лишь поступательное движение.

Греч. *νομος* — закон, *γραμμή* — письменный знак, изображение,

См. также: *Номография*.

Лит.: [95].

**НОМОГРАФИЯ** — раздел математики, изучающий теорию и практику построения *номограмм*. Большую роль в развитии отечественной Н. сыграли работы профессоров Н. А. Глаголева и А. А. Глаголева.

Лит.: [95].

**НИОУС** — приспособление, предназначенное для измерения длин отрезков с точностью до  $10^{-k}$  долей единицы измерения ( $k$  — натуральное число, обычно  $k = 1$ ; 2). Н. представляет собой линейку, у которой 9 делений масштаба разделены на 10 равных (конгруэнтных) частей или 99 делений на 100 равных по длине частей.

Если конец измеряемого отрезка  $AB$  (рис. 20) не совпадает с делением масштаба, то к концу его приставляют Н. и смотрят, какое деление Н. совпадает с делением масштаба. На рисунке длина отрезка  $AB$  равна 5,6 ед. масштаба.

**НОРМА** — понятие, обобщающее абсолютную величину (модуль) числа, а также длину вектора. Н. есть функция вектора *линейного (векторного) пространства*  $L$ , удовлетворяющая следующим трем условиям (Н. обозначается  $||x||$ ):

- 1)  $||x|| > 0$  при  $x \neq 0$ ,  $||x|| = 0$  при  $x = 0$ ;
- 2)  $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$  для любого  $x \in L$  и действительного числа  $\alpha$ ;
- 3)  $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$  для любых  $x$  и  $y$  из  $L$ . Во всяком евклидовом пространстве Н. может быть определена при помощи скалярного произведения:  $||x|| = \sqrt{(x \cdot x)}$ . В пространстве непрерывных функций на отрезке  $[a; b]$  рассматривается Н.:

$$||\varphi(t)|| = \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t)|.$$

Существует много других Н. Векторное (линейное) пространство, в котором определена Н., называется нормированным.

Н. комплексного числа и Н. кватерниона — модули соответственно комплексного числа и кватерниона.

Лит.: [53, 87, 94].

**НОРМАЛЬ** к кривой (к поверхности) в данной ее точке — прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная к касательной прямой (касательной плоскости) в этой же точке кривой (поверхности).

Лат. *normalis* — прямой.

**НОРМАЛЬНАЯ ЖОРДАНОВА ФОРМА** матрицы  $A$  — матрица вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_p \end{pmatrix},$$

где  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , есть квадратная матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

некоторого порядка. Числа  $\lambda_i$  и порядок матрицы  $A_i$  могут быть определены непосредственно по матрице  $A$ . Если порядок матрицы  $A_i$  равен единице, то она есть число  $\lambda_i$ .

Нужно иметь в виду, что  $\lambda_i$  с различными индексами могут быть равными друг другу.

Имеет место **теорема**: для всякой матрицы  $A$  найдется невырожденная матрица  $C$ , такая, что  $CAC^{-1}$  имеет вид Н. ж. ф. Н. ж. ф. матрицы  $A$  единственна с точностью до произвольной нумерации жордановых «клеток»  $A_i$ . Алгебраический смысл Н. ж. ф. матрицы  $A$  таков. Пусть линейное преобразование  $P$  в данном базисе комплексного линейного пространства записывается с помощью матрицы  $A$ . Спрашивается, нельзя ли изменить базис линейного пространства так, чтобы матрица линейного преобразования стала возможно более простой. Н. ж. ф. матрицы  $A$  является тем наиболее простым видом, в котором может быть записана матрица линейного преобразования  $P$ .

Числа  $\lambda_i$ , упомянутые выше, есть собственные значения или характеристические числа матрицы (они являются корнями *векового* уравнения). Жордановы «клетки»  $A_i$  имеют порядок больше единицы только в случае, когда корень  $\lambda_i$  является кратным. Однако кратность корня  $\lambda_i$ , вообще говоря, не равна порядку  $A_i$ . Частным случаем Н. ж. ф. являются диагональные матрицы. Н. ж. ф. таких важных видов матриц, как *ортогональные*, *унитарные*, симметрические, кососимметрические, является диагональной матрицей. Н. ж. ф. матриц часто используется в теории дифференциальных уравнений, *теории групп Ли*, а также в линейной алгебре, чьим понятием она является. Вот как решается, например, матричное уравнение

$$X^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что  $X_0$  — решение этого уравнения. Приведем ее к Н. ж. ф.

$Y = CX_0C^{-1}$ , тогда  $Y^2 = CX_0C^{-1}CX_0C^{-1} = CX_0X_0C^{-1} = C(-E)C^{-1} = -E$ , т. е. матрица Н. ж. ф.  $Y$  удовлетворяет уравнению

$$Y^2 = -E.$$

Непосредственно убеждаемся, что  $Y$  с таким условием диагональна. Следовательно,

$$Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где  $\lambda_k = \pm i$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

$X_0$  легко выражается через  $Y$ :  $X_0 = C^{-1}YC$ ,  $C$  — произвольная невырожденная матрица.

Лит.: [79].

**НОРМАЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ** к пространственной кривой в данной на ней точке  $M$  — плоскость, проходящая через точку  $M$  и перпендикулярная касательной к данной кривой в той же точке.

Н. п. к прямой  $l$  в какой-либо ее точке  $M$  называется также плоскостью, перпендикулярной к прямой  $l$ .

**НОРМАЛЬНЫЙ ВЕКТОР:** 1°. Н. в. прямой (к прямой)  $Ax + By + C = 0$  — это вектор  $\vec{N} = (A, B)$  (обозначают и так:  $\vec{n} = (A, B)$ ,  $A, B$  одновременно не равны нулю).

2°. Н. в. плоскости (к плоскости)  $Ax + By + Cz + D = 0$  — это вектор  $\vec{N} = (A, B, C)$ , где координаты вектора  $A, B, C$  одновременно не равны нулю.

Н. в. прямой и плоскости называют также перпендикулярным вектором соответственно к прямой и плоскости.

**НОРМАЛЬНОЕ (гауссово) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** (или распределение нормальной случайной величины  $X$ ) — распределение вероятностей, задаваемое дифференциальным законом (функцией):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

здесь  $a$  — математическое ожидание случайной величины  $X$ ,  $\sigma$  — среднеквадратическое отклонение  $X$ ,  $f(x)$  — плотность вероятности случайной величины  $X$  в точке  $x$ . Графики функций  $f(x)$  при различных  $a, \sigma$  приведены на рисунке 21. Рисунок иллюстрирует зависимость кривых  $f(x)$  от  $a, \sigma$ : вершина кривой имеет абсциссу  $x = a$ , кривая симметрична относительно прямой  $x = a$ , большему  $\sigma$  соответствует пологая кривая, малому  $\sigma$  — островершинная, крутая кривая; точки перегиба кривой имеют абсциссы  $a \pm \sigma$ . Площадь под каждой из кривых равна 1.

Дифференциальная функция  $f(x)$ , задающая нормальную случайную величину  $X$ , позволяет вычислить вероятности  $P(a \leq X < \beta)$  того, что случайная ве-

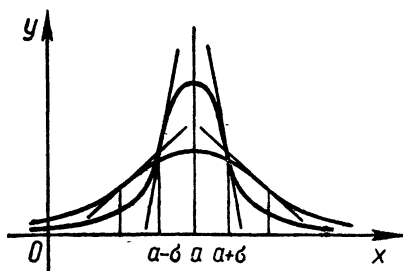


Рис. 21

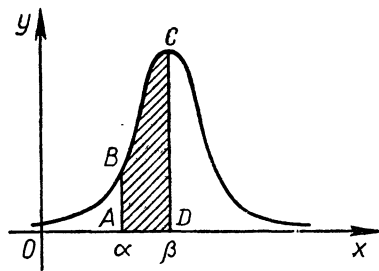


Рис. 22

личина  $X$  примет свое значение в интервале  $(\alpha, \beta)$ :

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt. \quad (*)$$

Формула (\*) может быть истолкована в геометрических терминах: вероятность  $P(\alpha \leq X < \beta)$  численно равна площади криволинейной трапеции  $ABCD$  (рис. 22). Поскольку первообразная функции  $f(x)$  не является элементарной функцией, вычисление интегралов (\*) производят с помощью таблиц функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

называемой Лапласа функцией. Именно:

$$P(\alpha \leq x < \beta) = \Phi(x'') - \Phi(x'), \quad x'' = \frac{\beta - a}{\sigma}, \quad x' = \frac{\alpha - a}{\sigma}.$$

Легко вычислить, что

$$P(a - \sigma \leq x < a + \sigma) = 0,6827..., \quad P(a - 2\sigma \leq x < a + 2\sigma) = 0,9544 ..., \\ P(a - 3\sigma \leq x < a + 3\sigma) = 0,9973 ...$$

Эти соотношения называют правилами одной, двух и трех сигм соответственно. Последняя формула означает, что событие  $a - 3\sigma \leq X < a + 3\sigma$  почти всегда наступает ( $p \approx 0,9973 \approx 1$ ). Такое событие называют практически достоверным событием.

Н. р., а также нормальная случайная величина называются также распределением Гаусса и гауссовой случайной величиной.

Н. р. играет исключительно важную роль в теории вероятности и математической статистике. Причиной этому являются те общие свойства случайных величин, которые формируются в предельных теоремах теории вероятностей и в особенности в центральной предельной теореме А. М. Ляпунова. Согласно этой теореме всякая случайная величина  $X$ , равная сумме большого количества «мелких» независимых случайных величин, имеет распределение, близкое к Н. р. При этом на практике часто встречаются случайные величины  $X$  с указанным выше свойством, что позволяет считать распределение случайной величины  $X$  близким к Н. р.

Совместное распределение нескольких случайных величин называется многомерным Н. р., если дифференциальный закон этого распределения имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Ce^{-F(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)},$$

где  $F(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n) = \sum A_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j)$ ,  $A_{ji} = A_{ij}$  — положительно определенная квадратичная форма.

Постоянная  $C$  такова, что интеграл  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  по всему пространству равняется единице. Числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  являются математическими ожиданиями случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  соответственно, а коэффициент  $A_{ij}$  выражается через дисперсии  $DX_1, DX_2, \dots, DX_n$  этих величин и через коэффициенты корреляции  $r_{kl}$  величин  $X_k, X_l$ ;  $k, l = 1, 2, \dots, n$ .

Классическими примерами, связанными с Н. р., являются задача о броуновском движении, задача о распределении ошибок наблюдения (К. Ф. Гаусс), задача о распределении скоростей молекул (Дж. К. Максвелл).

Лит.: [17, 26, 32, 43, 83].

**НОРМАЛЬНЫЙ ВИД** квадратичной формы. Всякая квадратичная форма с действительными коэффициентами  $\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_i x_j$  может быть приведена невырожденными вещественными линейными преобразованиями к виду:

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i z_i^2, \quad (*)$$

где  $\varepsilon_i$  равно  $\pm 1$  или  $-1$ ,  $m$  — ранг квадратичной формы,  $z_i$  — линейные формы от  $x_j$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Выражение  $(*)$  называется Н. в. квадратичной формы  $\sum a_{ij}x_i x_j$ .

**НОРМАЛЬНЫЙ ДЕЛИТЕЛЬ** группы  $G$  — подгруппа  $H$  такая, что  $g^{-1}Hg \subset H$  при любом  $g \in G$ , где под  $g^{-1}Hg$  понимается множество элементов вида  $g^{-1}hg$ ,  $g \in G$ ,  $h \in H$ . Смежные классы группы  $G$  по Н. д.  $H$  образуют группу, называемую фактор-группой  $G/H$ .

Примеры: если  $G$  — абелева группа, то любая ее подгруппа является Н. д. В группе унитарных матриц подгруппа унимодулярных матриц есть Н. д.

Лит.: [37, 48].

**НОРМИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ** уравнения прямой  $Ax + By + C = 0$  — число  $\pm (1 : \sqrt{A^2 + B^2})$ , знак которого противоположен знаку  $C$ . После умножения обеих частей уравнения на Н. м. оно принимает нормальный вид:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad p \geq 0.$$

Аналогично определяется Н. м. для уравнения плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ :

$$\pm (1 : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}).$$

Термин Н. м. выходит из употребления.

**НУЛЕВАЯ МАТРИЦА** — матрица, состоящая сплошь из нулей. Н. м. играет в кольце матриц роль нуля кольца.

**НУЛЕВОЕ РЕШЕНИЕ**:  $1^\circ$ . Н. р. линейной однородной системы уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \end{aligned}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

есть решение  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ .

2°. Н. р. линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

есть решение  $y(x) = 0$ .

**НУЛЕВОЙ ПОКАЗАТЕЛЬ** — показатель степени, равный нулю. По определению  $a^0 = 1$  при любом  $a \neq 0$ . Выражение  $0^0$  лишено смысла.

См. также: *Степень числа, Неопределенные выражения.*

**НУЛЬ поля (кольца, алгебры)** — такой элемент 0, что для любого  $x$  из поля (кольца, алгебры) выполняется равенство

$$x + 0 = x,$$

где равенство понимается в смысле сложения в поле (кольце, алгебре). В поле (кольце, алгебре) существует один и только один Н. Н. обладает также свойством  $0 \cdot x = 0$  для любого  $x$ . Н. является особым элементом поля: деление на Н. не определено. Обычное число 0 есть Н. в числовых полях и кольцах, т. е. в подполях и подкольцах поля (кольца) комплексных чисел.

В школе при изучении арифметики Н. определяется как число, от прибавления которого любое число не изменяется, или как число, от умножения на которое любое число равно Н.

Лит.: [14, 48].

**НУЛЬ-ВЕКТОР** — вектор, являющийся таким перемещением пространства, при котором каждая точка пространства переходит сама в себя. Другими словами, Н.-в. есть тождественное преобразование пространства.

Н.-в., как и всякий вектор, может быть определен с помощью отрезка  $AB$ , где  $A$  — произвольная точка пространства, а  $B$  — ее образ под действием вектора. Для Н.-в.  $A = B$  так, что отрезок, характеризующий Н.-в.; имеет совпадающие концы.

С Н.-в. не связывают никакого направления в пространстве. Н.-в. сонаправлен любому вектору. Координаты Н.в. равны нулю в любой аффинной системе координат. Н. в. является нулем в группе всех параллельных переносов пространства.

Лит.: [6].

**НУЛЬ-МНОГОЧЛЕН** — *многочлен*, каноническое представление которого есть нуль (см. *Каноническое представление многочлена*). Справедлива теорема о Н.-м. над полем нулевой характеристики. Если многочлен при любых значениях аргументов равен нулю, т. е. тождественно равен нулю, то он является Н.-м.

**НУЛЬ ФУНКЦИИ**  $f(x)$  — точка  $x_0$  такая, что  $f(x_0) = 0$ . Иначе Н. ф. есть решение уравнения  $f(x) = 0$ .

**НУМЕРАЦИЯ** — совокупность приемов наименования и обозначения чисел. В истории развития математики различных народов были известны различные Н.: римская (которой мы пользуемся для обозначения съездов, сессий, глав книг и т. д.); арабская (перешла из Индии) и др. Н. называется *счислением*.

Лит.: [31, 95].

**НЬЮТОНА БИНОМ** — название формулы, выражающей натуральную степень двучлена  $a + b$  в виде суммы степеней его слагаемых с определенными коэффициентами. Н. б. имеет вид:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (*)$$

где  $C_n^k$  — биномиальные коэффициенты, равные числу сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ , т. е.

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \quad \text{или} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Если биномиальные коэффициенты для различных  $n = 0, 1, 2, \dots$  записать в последовательно идущие строки, то приходим к *треугольнику Паскаля*. Н. б. формула названа в честь английского математика и физика И. Ньютона (1642—1727). Правая часть формулы Н. б. (\*) называется разложением степени бинорма. В разложении степени бинорма показатель степени буквы  $a$  убывает от  $n$  до 0, а показатель степени буквы  $b$  возрастает от 0 до  $n$ ; сумма показателей букв  $a$  и  $b$  в каждом слагаемом разложения бинорма все время равна  $n$  — показателю степени бинорма.

Для случая произвольного действительного числа  $n$  — показателя бинорма формула Н. б. обобщается в биномиальный ряд, а в случае увеличения числа слагаемых с двух на большее число мы имеем так называемую *полиномиальную теорему*. Н. б. называется также формулой Ньютона.

**НЬЮТОНА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА** — формула, дающая явное выражение для многочлена  $n$ -й степени, принимающего заданные значения в  $n + 1$  точках, расположенных на равных расстояниях друг от друга, т. е., если заданы точки  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , и числа  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , то Н. и. ф. дает выражение для многочлена  $P_n(x)$  такого, что  $P_n(x_i) = y_i$  в следующем виде:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \\ + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0,$$

где  $t = (x - x_0)/h$ ,  $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ ,  $\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$ , ...,  $\Delta^k y_0 = y_k - C_k^1 y_{k-1} + C_k^2 y_{k-2} + \dots + (-1)^k y_0$ . Эта формула используется при *интерполяции*. Ошибка, совершаемая при замене функции  $f(x)$  выражением  $P_n(x)$ , т. е.  $|f(x) - P_n(x)|$ , не превышает

$$h^{n+1} M \cdot \frac{t(t-1) \dots (t-n)}{(n+1)!},$$

где  $M$  — наибольшее значение абсолютной величины  $(n+1)$ -й производной  $f^{(n+1)}(x)$  функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_0; x_n]$ ,  $h = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Н. и. ф. названа по имени И. Ньютона, хотя она, по-видимому, была известна ранее шотландскому математику Дж. Грегори.

См. также: *Лагранжа интерполяционная формула, Итерация.*

**НЬЮТОНА МЕТОД** приближенного решения уравнения  $f(x) = 0$  заключается в следующем (рис. 23). Выделяется отрезок  $[a_0; a_1]$ , содержащий искомый корень  $x_0$  данного уравнения и такой, что первая и вторая производные  $f'$  и  $f''$  в этом отрезке существуют и знакопостоянны. Тогда один из концов отрезка  $[a_0; a_1]$  берется за первое приближение корня. При этом берем левый конец  $a_0$ , если  $f'f'' < 0$ , и берем правый конец  $a_1$ , если  $f'f'' > 0$ . Обозначим первое приближение через  $a$ . Тогда в качестве второго приближения корня  $x_0$  берется точка пересечения касательной к кривой  $y = f(x)$  в точке  $(a, f(a))$  с осью абсцисс, т. е.

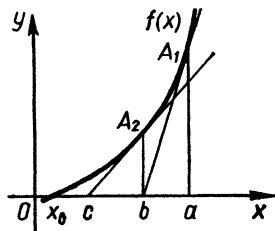


Рис. 23

$$b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

В качестве следующего приближения берется

$$c = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \text{ и т. д.}$$

На практике Н. м. часто комбинируется с методом хорд (см. *Ложного положения правило*): Н. м. называют также методом касательных.

Лит.: [47].

**НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА ФОРМУЛА** — формула, выражающая определенный интеграл от непрерывной функции  $f$  на отрезке  $[a; b]$  через значения первообразной функции  $F$  для данной функции в концах отрезка интегрирования. Н. — Л. ф. имеет вид:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Н. — Л. ф. основана на теореме о том, что при рассмотрении определенного интеграла от непрерывной функции  $f$  с переменным верхним пределом  $\int_a^x f(t) dt$  как функции от  $x$  эта функция оказывается непрерывно дифференцируемой и

$$\frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

Важность Н. — Л. ф. определяется тем, что ею устанавливается связь между *определенным интегралом* от некоторой функции  $f$  и *неопределенным интегралом* от этой же функции  $f$ , т. е. объектами, определяемыми, как правило, принципиально различным образом.

Лит.: [87].



**ОБЛАСТЬ ЗАМКНУТАЯ** (или закрытая область) в  $n$ -мерном пространстве — *открытая область*, дополненная всеми ее *граничными точками*. О. з. является *замкнутым множеством*.

Примеры О. з. можно получить из примеров термина *Область открытая* (рис. 24), если добавить к этим областям (фигурам) ограничивающие их контуры или поверхности.

**ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ** — то же, что и множество значений функции.

**ОБЛАСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ** (отображения), т. е. функционального по  $B$  соответствия  $f \in A \times B$ , или, иначе, отображения  $f: A \rightarrow B$ . Это множество  $B$ .

**ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ** — множество значений, принимаемых независимой переменной (аргументом) (см. *Функция*). О. о. ф. не обязана являться областью. Для функции, заданной некоторой формулой, под О. о. ф. часто понимают (если О. о. ф. прямо не указана) множество допустимых значений аргумента, т. е. всех тех его значений, для которых формула дает действительное значение для функции; например, О. о. ф.  $z = \ln \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  считают внутренность круга с центром в начале координат радиуса единицы:  $x^2 + y^2 < 1$ .

**ОБЛАСТЬ ОТКРЫТАЯ** (или просто **ОБЛАСТЬ**):  $1^0$ . О. в  $n$ -мерном пространстве — связанное множество точек этого пространства, целиком состоящее из *внутренних точек*. Любые две точки О. можно соединить *ломаной*, целиком состоящей из точек О.

Примеры О. на плоскости и в пространстве: 1. Внутренность (а также

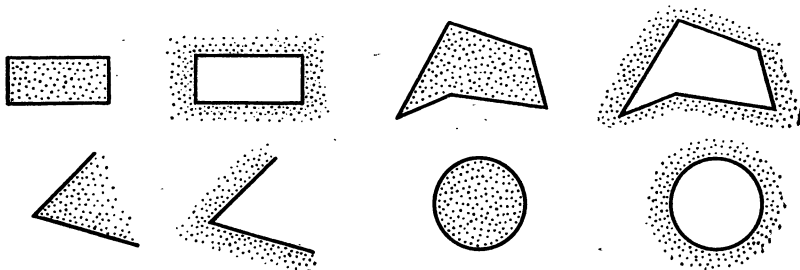


Рис. 24

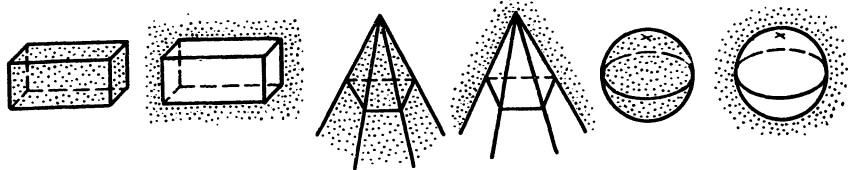


Рис. 25

внешность) круга, прямоугольника, многоугольника, угла (контуры этих фигур не включаются в рассматриваемое множество) представляет собой  $O.$  на плоскости (рис. 24).

2. Внутренности (а также внешности) шара, параллелепипеда, многогранного угла (поверхности, ограничивающие эти тела, не включаются в множество) представляют собой  $O.$  в пространстве (рис. 25).

В  $n$ -мерном пространстве при  $n > 3$  такое наглядное изображение  $O.$  невозможно (примеры таких  $O.$  даны в термине *Окрестность точки*).

2°.  $O.$  в метрическом или топологическом пространстве — связанное открытое множество этого пространства, т. е. связанное множество, состоящее только из внутренних точек. П р и м е р  $O.$  см. в термине *Окрестность точки*.

**ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ** функционального ряда (см. *Ряд функций*) — множество точек, при которых ряд сходится.  $O. с.$  не всегда будет областью в смысле открытого связанного множества.  $O. с.$  степенного ряда есть интервал  $|x - a| < r$  (*интервал сходимости*), причем граничные точки этого интервала могут как принадлежать  $O. с.$ , так и не принадлежать ей.

П р и м е р ы. 1. Ряд  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \sin^n x$  имеет  $O. с.$  множество  $x \neq \pi(1/2 + k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , т. е. все точки числовой оси, кроме точек с вышеуказанными координатами.

2.  $O. с.$  ряда  $\sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n x^n + b_n / x^n)$  включает в себя множество  $r < |x| < R$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq R \leq \infty$  и некоторые точки, абсциссы которых равны по модулю  $r$  или  $R$  (см. также *Лорана ряд*).

3.  $O. с.$  ряда  $\sum_{n=1}^{n=\infty} (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^n$  есть множество точек плоскости, координаты которых  $x$  и  $y$  удовлетворяют условию:  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2$ .

Существует несколько способов нахождения  $O. с.$  данного ряда (признаки Даламбера, Коши, Раабе и др.).

**ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ** — математическое обобщение понятия функции, вызванное потребностью удобного описания многих физических и математических явлений. Следующая ситуация поясняет причины, по которым использование  $O. ф.$  бывает полезным.

Пусть дана функция  $f_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & |x| < h. \\ 0, & |x| \geq h \end{cases}$ . Очевидно, что предел  $\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) = 0$ ,  $x \neq 0$  и  $\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) = \infty$ ,  $x = 0$ ; т. е. предельная функция при  $h \rightarrow 0$  не существует.

С другой стороны, для фиксированной непрерывной функции  $g(x)$  существует  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_h(x) dx = g_h(x)$  и, более того, существует  $\lim_{h \rightarrow 0} g_h(x)$ , равный  $g(0)$ .

Естественно считать, что существует и  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x)$ , только он принадлежит более широкому множеству, чем множество обычных функций. Вложение пространства обычных функций в это более широкое пространство можно осуществить следующим естественным способом (попутно определив само «более широкое пространство»).

Пусть  $D$  — множество финитных функций класса  $C^\infty$ . Каждая непрерывная функция определяет непрерывный линейный функционал  $F_f$  в  $D$  по формуле

$$F_f g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx \quad (*)$$

(при этом разным  $f$  соответствуют различные функционалы  $F_f$ ). Формула (\*) задает мономорфное отображение (Мономорфизм) пространства  $D$  в пространство  $D'$  всех непрерывных линейных функционалов в  $D$  (непрерывность понимается в смысле топологии пространства  $D$ , обычно задаваемой той или иной нормой).

При этом, как было отмечено в рассмотренном примере, возможно такое явление: предела последовательности функций из  $D$  не существует, а предел образов этих функций, т. е. линейных функционалов из  $D'$ , существует.

Рассмотренная конструкция оправдывает определение и название О. ф.: О. ф. есть непрерывный линейный функционал на пространстве финитных функций.

В множестве О. ф. рассматривают операции суммы О. ф. и умножения О. ф. на число, понимая под этим соответствующие операции над функционалами.

Рассматривают также дифференцирование О. ф., что определяется формулой  $F'(g) = -F(g')$ . Здесь  $F$  — О. ф.,  $F'$  — ее производная, значение  $F'$  на произвольной дифференцируемой функции  $g$  равно  $-F(g')$ . Это определение согласовано с определением дифференцирования обычных функций.

В частности,  $\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) = \delta$ , где  $\delta$  — линейный функционал такой, что  $\delta(g) = g(0)$  — знаменитая обобщенная  $\delta$ -функция Дирака. Производная  $\delta$ -функция равна функционалу  $\delta'$ , определенному формулой

$$\delta'(g) = -g'(0).$$

Производная функции  $Q(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  (функция Хевисайда) совпадает с  $\delta$ -функцией.

Рассматривают также операции интегрирования О. ф., свертки О. ф., преобразования Лапласа О. ф. (см. *Лапласа преобразование*) и преобразования Фурье (см. *Фурье преобразование*).

О. ф. весьма удобны при описании распределения физических величин в пространстве. Если непрерывное распределение масс в пространстве задается (обычной) функцией-плотностью, то такие понятия, как «плотность распределения масс материальной точки», «электрический потенциал простого и двойного слоя», требуют введения О. ф.

В теории уравнений с частными производными следующее обстоятельство играет значительную роль. Пусть дано уравнение  $L(u) = f$  с нулевыми гранич-

ными и начальными условиями. (Здесь  $L$  — линейный дифференциальный оператор,  $u$  — искомая, а  $f$  — заданная в области  $\Omega$  функция.) Если решить уравнение  $L(u) = f$  для «самой простой» функции  $f$ , то нетрудно получить решение задачи в общем виде: пусть  $u_{P_0}(P)$  такова, что  $L(u) = \delta(P - P_0)$ . Тогда

$$u(P) = \int_{\Omega} f(P_0) u_{P_0}(P) dP_0$$

удовлетворяет уравнению  $Lu = f$ .

О. ф. были впервые рассмотрены английским ученым П. Дираком в связи с задачами квантовой механики в 20-е годы XX в. Основы теории О. ф. были заложены советским математиком С. Л. Соболевым в 1936 г. В дальнейшем теории О. ф. занимались многие математики мира (в основном в связи с задачами математической физики). В послевоенные годы французским математиком Л. Шварцем было дано систематическое изложение теории О. ф., получивших в зарубежной литературе название «распределения».

Теория О. ф. находит все более широкое применение в различных физических, математических и прикладных исследованиях.

Лит.: [82].

**ОБРАЗ** элемента  $a \in A$  при отображении  $\varphi: A \rightarrow B$  множества  $A$  на множество  $B$  — тот элемент  $b \in B$ , в который отображается элемент  $a$ , т. е.  $b = \varphi(a)$ . Если рассматривается отображение множества точек, функций, векторов и т. д., то говорят об О. точки, функции, вектора и т. д. О. подмножества  $A'$  множества  $A$  при отображении  $\varphi$  множества  $A$  в множество  $B$  — множество всех элементов  $\varphi(a')$ , где  $a'$  пробегает подмножество  $A'$ . О. подмножества  $A'$  обозначается  $\varphi(A')$  или  $\text{Im} \varphi A'$ . Ясно, что  $\varphi(A') \subset B$ .

**ОБРАЗУЮЩАЯ ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ** — прямая, образующая при своем движении (перемещении) в пространстве *линейчатую поверхность*. При этом, если О. п. при своем движении пересекает все время некоторую линию (*направляющую*) и остается параллельной самой себе, то в результате движения О. п. получается цилиндрическая поверхность (цилиндр); если же О. п. при своем пересечении некоторой линии (направляющей) в то же время будет проходить через одну и ту же точку  $S$ , то О. п. опишет коническую поверхность (конус). *Однополостный гиперболоид* и *гиперболический параболоид*, также могут быть получены движением прямой в пространстве.

Лит.: [3, 61, 71].

**ОБРАТИМАЯ ФУНКЦИЯ** — функция (однозначная), для которой существует обратная функция. О. ф. называется также *обратным отображением* одного множества в другое.

См. также: *Соответствие, Отношение, Функция, Отображение.*

**ОБРАТИМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ** — отображение  $\varphi$  одного множества на другое (одной фигуры на другую), для которого существует *обратное отображение*  $\varphi^{-1}$  второго множества на первое. О. о. называют также *обратимой функцией*.

См. также: *Функция, Аффинные преобразования, Преобразование, Инверсия, Проективное преобразование, Перемещение, Соответствие.*

**ОБРАТНАЯ МАТРИЦА** к квадратной матрице  $A$  — такая матрица  $A^{-1}$ , что произведение  $AA^{-1}$  равно *единичной* матрице. Не всякая квадратная матрица имеет О. м. Необходимым и достаточным условием существования О. м.  $A^{-1}$  для

квадратной матрицы  $A$  является невырожденность матрицы  $A$ , т. е. отличие от нуля ее определителя. О. м.  $A^{-1}$  к невырожденной матрице  $A$  имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix},$$

где  $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение к элементу  $a_{ij}$  в матрице  $A$  и  $D$  — определитель матрицы  $A$ .

Для О. м. справедливо  $A^{-1} = D^{-1} \cdot A^*$ , где  $A^*$  — присоединенная матрица. Если  $AA^{-1} = I$ , то и  $A^{-1}A = I$ .

**ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ** — функция, которую можно задать формулой вида  $y = k : x$ , где  $k \neq 0$ , переменная  $x$  — аргумент, переменная  $y$  — значение функции. Графиком О. п. является линия — равнобочная гиперболa. О. п. называют также обратной пропорциональной зависимостью между двумя переменными.

**ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА** для данной теоремы (или по отношению к данной теореме) — теорема, в которой условием является заключение, а заключением — условие данной теоремы. Данную теорему по отношению к О. т. иногда называют прямой (исходной, первоначальной). В то же время О. т. к О. т. будет данная теорема. Поэтому прямая и обратная теоремы называются взаимно обратными теоремами (взаимно обратными предложениями). Условие теоремы обычно заключено между словами «если» и «то», а заключение следует после слова «то». Если данную теорему записать в форме:  $A \Rightarrow B$ , где  $A$  — условие теоремы, а  $B$  — заключение, то обратную для нее теорему можно записать в виде  $B \Rightarrow A$ .

Если прямая (данная) теорема верна, то обратная теорема, вообще говоря, неверна, например: если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны (прямая теорема); О. т.: если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то четырехугольник есть ромб. Эта обратная теорема (обратное предложение) неверна.

См. также: *Высказывание, Необходимое условие, Достаточное условие.*

Лит.: [40, 97].

**ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ** для данной функции (отображения)  $f$  (или к данной функции  $f$ ). Пусть  $f$  — функция ( $y = f(x)$ , или  $f \subset X \times Y$ ), или отображение множества  $X$  в  $Y$  ( $f : X \rightarrow Y$ ). Тогда (функция) отображение  $g$  множества  $f(X) \rightarrow X$  ( $y = g(x)$ ) называют О. ф. (обратным отображением), если композиция отображений  $g$  и  $f$  в любом порядке есть тождественное отображение. Обычно О. ф. для функции  $f$  обозначают  $f^{-1}$ . О. ф.  $g$  существует тогда и только тогда, когда отображение  $f$  множества  $X$  в  $Y$  взаимно однозначно (биективно).

Графики взаимно обратных вещественных функций  $y = g(x)$  и  $y = f(x)$  вещественного аргумента  $x$ , если у О. ф. обозначения значений функций  $x$  и ар-

аргумента  $y$  изменены на  $y$  и  $x$ , симметрично расположены относительно прямой  $y = x$ , содержащей биссектрисы 1-го и 3-го квадрантов на координатной плоскости, если же обозначения значений функции и аргумента не менять, то график О. ф.  $x = g(y)$  совпадет с графиком прямой функции  $y = f(x)$ .

**Примеры.** 1. Функция  $x \rightarrow x^2, [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  имеет О. ф.  $x \rightarrow \sqrt{x}$ .

2. Функция  $f(x) = 10^x, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$ , (иначе:  $\mathbb{R}_+$ ), где  $\mathbb{R}^{>0}$  — положительные действительные числа, возрастающая, она обратима; обратная для нее функция будет задана формулой  $y = \lg x$ .

3. Функция  $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$  возрастает и в силу непрерывности принимает все значения из отрезка  $[-1; 1]$ ; следовательно, функция  $y = \sin x$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  обратима, т. е. имеет О. ф., которая называется *арксинусом* и обозначается  $\arcsin x$ . О. ф. на отрезке  $[-1; 1]$  является также возрастающей и, как и синус, нечетной.

Справедлива следующая теорема об О. ф.: для всякой непрерывной возрастающей (убывающей) функции  $y = f(x)$ , заданной на отрезке  $[a; b]$  и с множеством значений  $[f(a); f(b)]$ , существует однозначная возрастающая (убывающая) и непрерывная О. ф., отображающая  $[f(a); f(b)]$  на  $[a; b]$ .

Мы привели определение однозначной О. ф., которую обычно называют О. ф., опуская слово «однозначной». Однако в математике иногда, допуская вольность, рассматривают многозначные О. ф. Строго говоря, речь тогда идет об обратном соответствии. Например, для функции  $y = f(x) = x^2, f: [-\infty; \infty[ \rightarrow [0; \infty[$ , О. ф. будет «двузначная» функция  $x = \varphi(y) = \pm\sqrt{y}$ , так как  $f(+\sqrt{y}) = (+\sqrt{y})^2 = y$  и  $f(-\sqrt{y}) = (-\sqrt{y})^2 = y$ . На рисунке 26 показан график функции  $y = +\sqrt{4x - x^2 - 3}$  и двузначной О. ф. (с изменением обозначений  $x$  и  $y$ )  $y = 2 \pm \sqrt{1 - x^2}$ . Если О. ф. многозначна, то ее часто представляют как совокупность однозначных функций, также называемых О. ф. (точнее, ветвями О. ф.).

**ОБРАТНОЕ ОТНОШЕНИЕ** (соответствие) между множествами. Пусть  $R$  — отношение из  $A$  в  $B$ , т. е. подмножество *декартова произведения* двух множеств  $A$  и  $B, R \subseteq A \times B$ .

Здесь  $A \times B \doteq \{ \langle a, b \rangle | a \in A, b \in B \}$  — множество упорядоченных пар элементов, из которых первый принадлежит  $A$ , а второй —  $B$ . Отношение, образованное всеми упорядоченными парами  $\langle b, a \rangle \in B \times A$ , такими, что  $\langle a, b \rangle \in R$ , называется О. о. для  $R$  и обозначается  $R^{-1}$ . Таким образом, О. о. является *бинарным* (двуместным) отношением. О. о. между множествами  $A$  и  $B$  называется также *обратным соответствием* из  $B$  в  $A$ . Имеет место  $(R^{-1})^{-1} = R$ .

О. о. задается таблицами, стрелками, перечислением упорядоченных пар и другими способами.

**Примеры.** 1. О. о. отношению строгого порядка « $<$ » является отношение строгого порядка « $>$ », т. е.

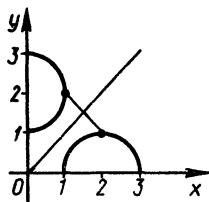


Рис. 26

О. о.  $<^{-1} = >$  на множестве действительных чисел  $R$  к отношению  $<$  является отношение  $>$ .

2. Если  $R$  есть отношение «быть делителем» на множестве  $Z$ , то О. о.  $R^{-1}$  является отношением «быть кратным» (или «кратно») на том же множестве  $Z$ .

3. О. о. отношению « $=$ » (равенства) является то же отношение « $=$ ».

См. также: *Отношение, Соответствие, Функция, Обратная функция, Рефлексивность, Симметричность, Транзитивность, Эквивалентность, График отношения...*

**ОБРАТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ:** Пусть множество  $A$  взаимно однозначно отображается на множество  $B$ ,  $f: A \rightarrow B$ . Если  $M$  — произвольная точка множества  $A$ , а  $M' = f(M)$  — соответствующая точка множества  $B$ , то отображение, которое каждой точке  $M' = f(M)$  множества  $B$  ставит в соответствие точку  $M$ , называется обратным отображением и обозначается  $f^{-1}: B \rightarrow A$ .

См. также: *Отображение, Соответствие, Функция, Обратное отображение.*

**ОБРАТНОЕ СООТВЕТСТВИЕ** между множествами — синоним термина *Обратное отношение* между множествами.

**ОБРАТНОЕ ЧИСЛО** для числа  $a \neq 0$  — число, равное  $1/a$ . Произведение числа  $a$  и О. ч. всегда равно 1. Если число  $1/a$  есть О. ч. для числа  $a \neq 0$ , то и число  $a$  есть обратное для числа  $1/a$ ; поэтому числа  $a \neq 0$  и  $1/a$  называются взаимно обратными. Взаимно обратные положительные числа связаны соотношением

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (a > 0).$$

Не следует смешивать понятие О. ч. с понятием обращенного числа, а также понятие О. ч. с понятием *противоположного числа*.

**ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ** — функции, обратные *гиперболическим функциям*  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{th} x$ . О. г. ф. выражаются формулами:

$$\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad 1 \leq x < \infty, \quad (*)$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1,$$

читается: «ареа синус гиперболический», «ареа косинус гиперболический», «ареа тангенс гиперболический».

Производные О. г. ф. имеют вид:

$$(\operatorname{Arsh} x)' = 1 : \sqrt{x^2 + 1},$$

$$(\operatorname{Arch} x)' = 1 : \sqrt{x^2 - 1},$$

$$(\operatorname{Arth} x)' = 1 : (x^2 - 1).$$

О. г. ф. часто появляются при интегрировании рациональных дробей и квадратичных иррациональностей.

В комплексной плоскости О. г. ф. многозначны. Если в формулах (\*) брать

главные значения логарифмов, то получим однозначные ветви О. г. ф. (главные их значения), обозначаемые  $\operatorname{arsh} z$ ,  $\operatorname{arch} z$ ,  $\operatorname{arth} z$ . О. г. ф. связаны с главными значениями обратных тригонометрических функций формулами:

$$\operatorname{arsh} z = \frac{1}{i} \operatorname{arc} \sin iz,$$

$$\operatorname{arch} z = i \operatorname{arc} \cos z,$$

$$\operatorname{arth} z = \frac{1}{i} \operatorname{arc} \operatorname{tg} iz.$$

Лат.: *area* — площадь.

Лит.: [100].

**ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ** — общее название следующих функций: арккосеканс, арккосинус, арккотангенс, арксеканс, арксинус, арктангенс. Обычно рассматривают только четыре из 6 О. т. ф.: арккосинус, арккотангенс, арксинус и арктангенс, которые обозначают соответственно  $\operatorname{arccos} x$ ,  $\operatorname{arccotg} x$ ,  $\operatorname{arcsin} x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ . О. т. ф. появляются при интегрировании некоторых рациональных дробей и квадратических иррациональностей. Иногда рассматривают многозначные О. т. ф., обозначаемые  $\operatorname{Arccos}$ ,  $\operatorname{Arcctg}$ ,  $\operatorname{Arcsin}$ ,  $\operatorname{Arctg}$ , однозначные ветви которых, взятые в определенных промежутках монотонного изменения функций, называют главными значениями О. т. ф. и обозначают так:  $\operatorname{arccos}$ ,  $\operatorname{arccotg}$ ,  $\operatorname{arcsin}$ ,  $\operatorname{arctg}$ . О. т. ф. не являются тригонометрическими, поэтому правильнее было бы называть их функциями, обратными тригонометрическим. О. т. ф. называют также *аркфункциями*.

Лат. *arcus* — дуга (величина дуги или величина угла).

См. также: *Функция, Обратная функция, Соответствие, Отношение*.

Лит.: [60].

**ОБЩАЯ МЕРА** двух величин  $P_1$  и  $P_2$  одного и того же рода (углов, отрезков и других) — величина  $P_3$  того же рода и такая, что отношения числовых значений величин  $P_1$  и  $P_2$  к числовому значению величины  $P_3$  есть целые числа. Иначе, О. м. двух величин — величина, содержащаяся целое число раз в данных величинах. Две величины (например, отрезки), имеющие О. м., называются с о и з м е р и м ы м и, а не имеющие О. м. — н е с о и з м е р и м ы м и.

Аналогично определяется О. м. для трех и большего числа данных величин одного и того же рода.

**ОБЩЕЕ НАИМЕНЬШЕЕ КРАТНОЕ** — см. *Наименьшее общее кратное*.

**ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ МНОГОЧЛЕНОВ**. Многочлен  $d$  называется О. д. м.  $f_1, f_2, \dots, f_k$ , если для каждого  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) многочлен  $d$  является делителем многочлена  $f_i$ .

**ОБЩИЙ НАИБОЛЬШИЙ ДЕЛИТЕЛЬ** — см. *Наибольший общий делитель*.

**ОБЩНОСТИ КВАНТОР** (или всеобщности квантор) — логический оператор  $\forall$ , используемый для универсальных высказываний. Если мы хотим сказать, что для всех  $x$  предметной области выполнено свойство  $P$ , то это записывается так:

$$\forall x P(x). \quad (*)$$

Читается: «для всех  $x$  имеет место  $P(x)$ ».



Например, если  $P(x)$  означает: «сумма внутренних углов треугольника  $x$  равна  $180^\circ$ », то в евклидовой геометрии справедлива теорема (\*).

Отрицание О. к. приводит к *существованию квантора*, а именно:

$$\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}.$$

Обозначение берет начало от перевернутой первой буквы А немецкого *alle* или английского *all* — все.

Лит.: [59].

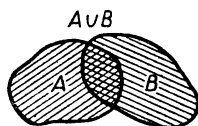


Рис. 27

**ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ  $A$  и  $B$**  есть *множество*, состоящее из тех и только тех элементов, каждый из которых есть элемент хотя бы одного из множеств  $A$  или  $B$ . О. м.  $A$  и  $B$  обозначается символом  $A \cup B$  (или  $A + B$  и называется часто также суммой множеств  $A$  и  $B$ ). О. м.  $A$  и  $B$  на рисунке 27 схематически изображено заштрихованной областью.

Аналогично, если даны множества  $A_\alpha$ , где  $\alpha$  пробегает конечное или бесконечное множество индексов  $\mathbb{M}$ , то О. м.  $A_\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{M}$ ) называют множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному множеству  $A_\alpha$  при некотором  $\alpha \in \mathbb{M}$ . (Если некоторый элемент  $a$  входит в несколько множеств  $A_\alpha$ , то в О. м.  $A_\alpha$  он входит лишь один раз.) О. м.  $A_\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{M}$ ) обозначается символом  $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{M}} A_\alpha$  (или  $\sum_{\alpha \in \mathbb{M}} A_\alpha$ ), а в случае, когда  $\mathbb{M}$  конечно и со-

стоит из  $n$  чисел  $1, 2, \dots, n$ , О. м.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  обозначается символом  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  (или  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$  или  $\bigcup_{i=1}^n A_i$ ).

Если  $\mathbb{M}$  — *счетное множество* и состоит из чисел натурального ряда  $N$ , то О. м.  $A_1, A_2, \dots$  обозначается символом  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  (или  $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ , или  $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ , или  $A_1 + A_2 + \dots$ ).

О. м. является одной из основных операций над множествами. О. м. удовлетворяет законам *коммутативности*, *ассоциативности* и *идемпотентности*; О. м. связано с *пересечением множеств* двумя законами *дистрибутивности*:

$$A \cap \left( \bigcup_{\alpha \in \mathbb{M}} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{M}} (A \cap B_\alpha) \quad \text{и} \quad A \cup \left( \bigcap_{\alpha \in \mathbb{M}} B_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{M}} (A \cup B_\alpha).$$

Эти два закона дистрибутивности двойственны (см. *Двойственности принцип*).

**П р и м е р ы.** 1. Пусть  $A$  — множество чётных чисел и  $B$  — множество нечётных чисел; тогда  $A \cup B$  — множество всех целых чисел  $\mathbb{Z}$ . 2. Пусть  $A_i$  — множество всех действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $i - 1 \leq x \leq i + 1$ , где  $i$  пробегает множество натуральных чисел  $N$ ; тогда  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  является множеством всех неотрицательных действительных чисел.

**ОБЪЕМ** — неотрицательная аддитивная функция множества точек трехмерного пространства (в обобщениях —  $n$ -мерного пространства), не меняющаяся при любых движениях пространства. Это значит, что некоторым множествам точек трехмерного пространства ставятся в соответствие неотрицательные числа, называемые О., при этом выполняются следующие свойства (аксиомы):

1. Конгруэнтные множества имеют равные объемы (свойство инвариантности).

2. О. объединения конечного множества (счетного множества) множеств (фигур, тел), не имеющих общих внутренних точек, равен сумме объемов этих множеств — свойство аддитивности (счетной аддитивности).

3. Значение О. единичного куба (длина ребра куба равна 1) равно единице.

Из свойств О. можно заключить, что О. правильной части множества точек (фигуры, тела) не больше О. всего множества точек.

О. есть мера количества пространства, занимаемого точками множества (тела, в частности). К описанному определению О. приводят интуитивные представления об измерении части пространства.

Если тело, О. которого мы измеряем, не может быть составлено из конечного числа единичных кубов, то поступаем так: заполняем данное тело кубиками со стороной  $h$  так, чтобы два соседних куба имели общую грань, до тех пор пока нельзя будет добавить ни одного куба со стороной  $h$  без того, чтобы не выйти за границу тела. С другой стороны, рассматриваем множество кубиков, примыкающих друг к другу, как описано выше, покрывающих все точки тела, и таких что каждый имеет непустое пересечение с телом. Их О. обозначим через  $v_h$ ; О., занимаемый внутренними кубиками, обозначим  $v_h$ . Тогда О. тела равен  $\lim_{h \rightarrow 0} v_h =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} v_h$  при всевозможных способах заполнения тела кубиками. Конечно, не

для всякого тела существует  $\lim_{h \rightarrow 0} v_h$  и не всегда  $\lim_{h \rightarrow 0} v_h = \lim_{h \rightarrow 0} v^h$ . Поэтому О. определяется не для всех точечных множеств трехмерного пространства. О. обобщается в понятии *меры множества*. Те множества, которые не имеют меры (объема), называются неизмеримыми. Два тела, имеющие равные О., называются *равновеликими*. Два равносоставленных многогранника равновелики, но обратное, вообще говоря, как показал немецкий математик Деян (1901), неверно: существуют равновеликие многогранники, которые не равносоставлены.

**Примеры.** 1. О. пирамиды равен  $\frac{1}{3}SH$ , где  $S$  — площадь основания,  $H$  — высота (или ее длина).

2. О. многогранника, в который можно вписать сферу, равен  $\frac{1}{3}T \cdot R$ , где  $T$  — полная поверхность многогранника, а  $R$  — радиус вписанной сферы.

3. О. тела, полученного вращением кривой  $y = f(x)$ ,  $a < x < b$ ,  $f(x) \geq 0$  вокруг оси  $Ox$ , равен  $\pi \int_a^b f^2(x) dx$ .

См. также: *Длина отрезка, Длина кривой, Площадь*.

Лит.: [51].

**ОБЫКНОВЕННАЯ ДРОБЬ** — дробь  $p/q$ , где числитель дроби  $p \in \mathbb{Z}$ , а знаменатель дроби  $q \in \mathbb{N}$ . О. д. всегда является или дробным рациональным числом, или целым рациональным числом. О. д., у которой знаменатель  $q = 10^n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , можно представить в виде десятичной записи, т. е. в виде десятичной дроби.

См. также: *Дробь, Десятичная дробь, Бесконечная десятичная дробь, Непрерывная дробь, Правильная дробь*.

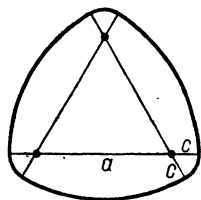


Рис. 28

**ОБЫКНОВЕННАЯ ТОЧКА:** 1°. О. т. кривой, заданной уравнением  $F(x, y) = 0$ , есть точка  $M_0(x_0, y_0)$ , в которой частные производные от  $F$  не обращаются одновременно в нуль.

2°. О. т. дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$  — точка  $M_0(x_0, y_0)$ , в окрестности которой существует единственное решение, удовлетворяющее условию:  $y(x_0) = y_0$ .

3°. О. т. однозначной аналитической функции — точки, в которой не нарушается аналитичность функции.

**ОВАЛЫ** — замкнутые выпуклые гладкие плоские кривые.

Простейшим примером О. постоянной ширины является окружность. Другим примером такого О. может служить О., который получается следующим образом (рис. 28): из вершин равностороннего треугольника со стороной  $a$  описывают дуги шести окружностей: три — произвольным радиусом  $c$ , три другие — радиусом, равным  $a + c$ :

В алгебраической геометрии О. называют также всякие замкнутые (не обязательно выпуклые) ветви плоских алгебраических кривых, не имеющих точек самопересечения.

Франц. *ovale* от лат. *ovum* — яйцо.

**ОГИБАЮЩАЯ** однопараметрического семейства линий на плоскости (или однопараметрического семейства поверхностей в пространстве) — линия (поверхность), которая в каждой своей точке касается по меньшей мере одной линии (поверхности) семейства.

Уравнение О. может быть получено следующим образом: пусть  $f(x, y, C) = 0$  — уравнение однопараметрического (параметр  $C$ ) семейства линий на плоскости. Координаты  $x, y$  точек, принадлежащих О. семейства, удовлетворяют системе уравнений  $f(x, y, C) = 0$ ,  $f'_C(x, y, C) = 0$  (\*) вместе с некоторым значением параметра  $C$ . Если исключить  $C$  из системы уравнений (\*), то получим уравнение  $F(x, y) = 0$ , которому удовлетворяют точки О. и особые точки кривых семейства, т. е. точки, для которых одновременно  $f'_x = 0$ ,  $f'_y = 0$ .

**Примеры.** 1. О. семейства окружностей  $(x - C)^2 + y^2 = R^2$  будет состоять из двух параллельных прямых:  $y = R$ ,  $y = -R$  (рис. 29).

2. Всякая кривая является О. семейства своих касательных и О. семейства своих кругов кривизны.

3. Если в каждой точке кривой построить к ней нормаль, то О. семейства этих нормалей будет *эволюта* данной кривой.

4. О. семейства сфер радиуса  $R$  с центрами, лежащими на одной прямой, будет круговой цилиндр того же радиуса  $R$  с осью, совпадающей с линией центров сфер: цилиндр касается каждой сферы по окружности.

5. О. семейства сфер радиуса  $R$ , центры которых лежат в одной плоскости, есть пара плоскостей, параллельных плоскости центров и отстоящих от нее в ту или другую сторону на расстоянии  $R$ .

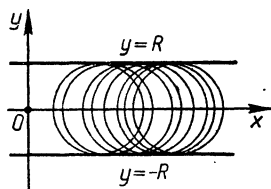


Рис. 29

Понятие *О.* имеет значение не только в геометрии, но и в некоторых вопросах математического анализа (особые решения дифференциальных уравнений), физики (фронт волны) и др.

Лит.: [61, 71].

**ОГРАНИЧЕННАЯ ВЕЛИЧИНА** — переменная, которая в процессе своего изменения остается всегда по абсолютной величине меньше некоторого постоянного числа (см. *Ограниченная последовательность, Ограниченная функция*).

**ОГРАНИЧЕННАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ** — последовательность (чисел, точек и т. д.), члены которой составляют *ограниченное множество*. Аналогично последовательность называется ограниченной сверху (снизу), если ее члены составляют ограниченное множество сверху (снизу).

**ОГРАНИЧЕННАЯ ФУНКЦИЯ**  $y = f(x)$  или  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на данном множестве  $E$  — функция, для которой множество значений, принимаемых ею, когда аргумент пробегает  $E$ , есть *ограниченное множество*.

**П р и м е р ы.** 1. Функция  $y = 1/x$  — *О. ф.* на интервале  $]1; \infty[$  и не является *О. ф.* на интервале  $]0; 1[$ .

2.  $u = x^2 + y^2$  на любом ограниченном множестве плоскости является *О. ф.*

Аналогично функция называется ограниченной сверху (снизу), если множество ее значений есть ограниченное сверху (снизу) множество.

**ОГРАНИЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО:** 1°. *О. м. действительных чисел* — множество  $\{x\}$  на числовой оси, для которого существует число  $B$  такое, что для любого элемента  $x$  из этого множества  $|x| \leq B$ .

2°. *О. м. в  $n$ -мерном или метрическом пространстве* — множество, для которого существует шар, целиком его содержащий.

Аналогично п. 1° определяется ограниченное сверху (снизу) множество действительных чисел, как такое множество  $E$ , для которого существует число  $B$ , не меньшее (не большее) любых элементов из  $E$ , т. е. любое число  $x \in E$  удовлетворяет неравенству  $x \leq B$  ( $x \geq B$ ).

**ОДНОЛИСТНАЯ ФУНКЦИЯ** — аналитическая функция комплексного переменного  $w = f(z)$ , заданная в области  $D$  и не принимающая в этой области одинаковых значений, т. е.  $f(z_1) \neq f(z_2)$  при  $z_1 \neq z_2$ ,  $z_1, z_2 \in D$ . Производная *О. ф.* не обращается в нуль внутри области  $D$ . *О. ф.* осуществляет взаимно однозначное соответствие между областями  $D$  и  $f(D)$  (плоскостью переменного  $w$ ), причем это соответствие является *конформным отображением*.

Изучение функции, однолистной в некоторой односвязной области, может быть сведено к изучению двух *О. ф.* внутри круга  $|z| \leq 1$ . *О. ф.* в круге  $|z| \leq 1$  называется нормированной, если  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ . Для любой нормированной *О. ф.*  $f$ , заданной в круге  $|z| \leq 1$ , справедливо следующее утверждение: коэффициенты ряда Тейлора (см. *Тейлора ряд*)  $a_0, a_1, a_2, \dots$  функции  $f$

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

удовлетворяют неравенствам  $|a_2| < 2$ ,  $|a_3| < 3$ , ...,  $|a_n| < n$ , ..., т. е. эти коэффициенты растут не слишком быстро в зависимости от номера.

Известна проблема коэффициентов из теории *О. ф.*; указать необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты  $a_2, a_3, \dots$ ,

$a_n, \dots$ , чтобы функция  $f(z)$  была О. ф. В настоящее время проблема не решена.

Лит.: [56].

**ОДНОЛИСТНОСТИ ОБЛАСТЬ** — всякая область плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$ , в которой аналитическая функция  $w = f(z)$  является *однолистной функцией*. Например, для функции

$$w = \sin z = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x$$

О. о. служит любая полоса  $a \leq x \leq a + \pi, -\infty < y < +\infty, a = -\frac{\pi}{2} + k\pi$

(рис. 30). Для  $f(z)$ , рассматриваемой в О. о., обратная функция  $z = F(w)$  однозначна и называется ветвью полной обратной функции. Так, обратная для  $w = \sin z$  функция  $z = \text{Arc} \sin w$  имеет бесконечно много ветвей, соответствующих О. о.:

$$(2k - 1)\frac{\pi}{2} \leq x \leq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**ОДНОПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД** — поверхность второго порядка, каноническое уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

при  $a = b$  О. г. называется О. г. вращения).

Всякая плоскость, параллельная плоскости  $xOy$ , пересекает О. г. по *эллипсу*, и каждая плоскость, проходящая через ось  $Oy$ , пересекает О. г. по *гиперболе* (рис. 31).

Через каждую точку  $M$  О. г. проходят две прямые  $l_1$  и  $l_2$ , целиком принадлежащие О. г., — так называемые прямолинейные образующие О. г. (рис. 32).

Для того чтобы уравнение второго порядка  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$  от трех переменных  $x, y, z$  являлось уравнением О. г., необходимо и достаточно чтобы  $\det \|a_{ij}\| > 0$  и собственные значения матрицы  $(a_{ij} = a_{ji})$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

имели разные знаки. О. г. — центральная поверхность — имеет при  $a \neq b$  три плоскости симметрии. О. г. представляет собой *линейчатую поверхность*.

См. также: *Гиперboloиды*.

Лит.: [3, 69].

**ОДНОРОДНАЯ ФУНКЦИЯ** — функция нескольких переменных, для которой выполняется тождество

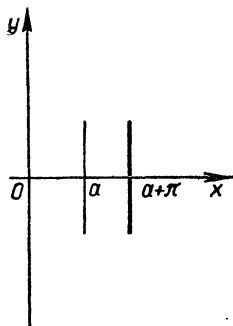


Рис. 30

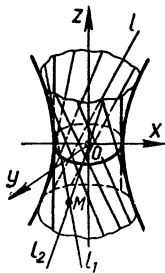


Рис. 31

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

при всевозможных  $\lambda \neq 0$ , где  $k$  — некоторая постоянная (называемая степенью или измерением однородности функции). О. ф. имеет ряд интересных свойств. См. по этому поводу, например, *Эйлера теорему*.

Примеры: 1)  $f(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)$ ,  $k = 3$ ; 2)  $f(x, y) = 1/\sqrt{xy^2 + y^3}$ ,  $k = -3/2$ ; 3)  $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ ,  $k = 1/2$ ; 4) площадь треугольника есть О. ф. длин его сторон:  $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ , где  $a, b, c$  и  $p$  соответственно стороны и полупериметр треугольника (формула Герона); 5)  $f(x, y) = \ln(x/y)$ ,  $k = 0$ .

**ОДНОРОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО** — в самом общем смысле множество  $M$  (точек О. п.) вместе с заданной группой  $G$  (взаимно-однозначных) преобразований множества  $M$  в себя, удовлетворяющих условию транзитивности: для любых двух точек  $p_1, p_2 \in M$  найдется такое преобразование  $\gamma \in G$ , что  $\gamma(p_1) = p_2$ .

Всякое О. п.  $X = (M, G)$  можно интерпретировать в теоретико-групповых терминах (применительно к группе  $G$  и некоторой ее подгруппе  $H$ ). Именно пусть  $H$  — подгруппа группы  $G$ , состоящая из всех преобразований группы, оставляющих некоторую точку  $p_0 \in M$  неподвижной ( $H$  называется стационарной подгруппой точки  $p_0 \in M$ ). Разобьем множество элементов группы  $G$  на подмножества (смежные классы по подгруппе  $H$ ) следующим образом: два элемента  $\gamma_1, \gamma_2 \in G$  отнесем к одному классу смежности, если  $\gamma_1^{-1}\gamma_2 \in H$ . Каждый класс смежности состоит из элементов вида  $\gamma h$ , где  $\gamma$  — выбранный элемент из  $G$ ,  $h$  — произвольный элемент из  $H$ . При этом класс смежности обозначают так:  $\gamma H$ . Один и тот же класс смежности может быть обозначен по-разному:  $\gamma_1 H$  и  $\gamma_2 H$  — в этом случае  $\gamma_1^{-1}\gamma_2 \in H$ .

Существует взаимно-однозначное соответствие между точками О. п.  $M$  и множеством смежных классов, обозначаемых  $G/H$ . При таком соответствии действия преобразований  $\gamma \in G$  на  $M$  и действия  $\gamma \in G$  на  $G/H$  оказываются согласованными.

Упомянутое отображение  $f: M \rightarrow G/H$  определено так: пусть  $p \in M$  и  $\gamma$  таково, что  $\gamma(p_0) = p$ ; при этом  $f(p) = \gamma H \in G/H$ . Это определение корректно, т. е. не зависит от неоднозначности выбора  $\gamma \in G$ .

Упомянутое действие элементов группы  $G$  на множестве смежных классов  $G/H$  определено формулой  $\gamma(\gamma_1 H) = (\gamma\gamma_1)H$ , и это определение корректно.

Обычно рассматривают такие О. п., множество точек  $M$  которых наделено некоторой структурой, сохраняемой при действии преобразованной группы  $G$ , — топологией, метрикой и др.

Особенным вниманием математиков пользуются римановы О. п. При этом преобразования пространства, задаваемые элементами группы  $G$ , называются движениями.

Самыми простыми из римановых О. п. являются евклидово пространство, Лобачевского пространство, пространства постоянной кривизны, в частности сфера  $S^{n-1}$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве.

Как известно, в этих пространствах действует транзитивная группа движений. Например, в евклидовом пространстве группа всех перемещений транзитивна (транзитивна даже подгруппа  $G$ , состоящая из всех параллельных переносов);

стационарной подгруппой точки  $p_0$  евклидова пространства является группа  $H$  всех вращений евклидова пространства. В согласии с общей схемой евклидово пространство изоморфно пространству  $G/H$ . Для сферы  $S^{n-1}$  евклидова пространства группа движений  $G$  состоит из всех вращений евклидова пространства, а стационарная подгруппа точки  $p_0 \in S^{n-1}$  — из всех вращений евклидова пространства вокруг оси, соединяющей центр сферы с точкой  $p_0$ .

Понятие О. п. является одним из главных в *эрлангенской программе*.

Теория римановых О. п. является развитой математической теорией, содержащей ряд весьма глубоких результатов, применяемых в настоящее время во многих разделах математики. Среди этих результатов следует отметить классификацию римановых симметрических пространств, данную французским математиком Э. Картаном.

В связи с развитием теории относительности А. Эйнштейна теория псевдоримановых О. п. (таким пространством является многообразие «пространство-время» в теории относительности) получила новый импульс.

Интерес к теории О. п. в настоящее время растет среди математиков различных специальностей (это относится в первую очередь к специалистам в области алгебраической топологии, функционального анализа, теории вероятностей).

**ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ** — уравнение вида  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , где  $f$  — однородная функция некоторой степени однородности, т. е. удовлетворяющая уравнению  $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  для любого  $\lambda \in R$ . Поверхность в  $n$ -мерном арифметическом пространстве, уравнение которой является О. у., представляет собой конус с вершиной в точке  $(0, 0, \dots, 0)$ .

Говорят о системе О. у., в частности о системе О. у., соответствующей заданной системе линейных уравнений: если  $A\vec{x} = \vec{b}$  — матричная запись системы линейных уравнений ( $A$  — данная матрица,  $\vec{b}$  — данный вектор,  $\vec{x}$  — искомый вектор), то соответствующей системой О. у. является  $A\vec{x} = \vec{0}$ .

Рассматривают также линейные дифференциальные О. у., соответствующие заданному линейному (неоднородному) дифференциальному уравнению

$$a_0(x)y_0^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x),$$

именно:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0.$$

Левая часть последнего соотношения представляет собой О. у. переменных  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ .

Свойства решений системы линейных уравнений (конечных и дифференциальных) находятся в тесной связи со свойствами соответствующей системы О. у.

В начальном курсе теории дифференциальных уравнений рассматривается уравнение  $y' = f(x, y)$ , где  $f(x, y)$  — однородная функция степени нуль. Такое уравнение именуется О. у. (по отношению к  $x, y$ ).

Лит.: [6].

**ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ** точки  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$ -мерного евклидова, аффинного или арифметического пространства — всякий упорядоченный набор из  $n+1$  числа  $(y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1})$  такой, что  $x_1 = y_1/y_{n+1}$ ,  $x_2 = y_2/y_{n+1}$ , ...

$x_n = y_n / y_{n+1}$ . При этом одной точке  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  рассматриваемого  $n$ -мерного пространства соответствует множество таких упорядоченных наборов из  $n+1$  числа, но все такие наборы пропорциональны набору  $(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$ .

**ОДНОРОДНЫЙ МНОГОЧЛЕН** — то же, что и *Форма*.

**ОДНОСВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ** — область (не обязательно открытая), обладающая следующим свойством: любой замкнутый контур, принадлежащий области, можно непрерывным образом стянуть в точку, не покидая пределов области.

**Примеры:** интервал, круг, шар (открытые или замкнутые — безразлично) являются О. о. *Кольцо* (множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству  $0 < a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ ) не является О. о. Зато шар без ядра (множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют неравенству  $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$ ) есть О. о.

О. о. имеет ряд свойств, выделяющих их из других областей. Так, справедлива **теорема**: если функция  $f(x, y)$  гармонична в О. о.  $G$  на плоскости, то интеграл по любой окружности, целиком лежащей в  $G$ , деленный на длину окружности, равен значению функции в центре окружности. Однако теорема перестает быть верной, если область  $G$  не является односвязной.

**ОДНОСТОРОННИЕ ПОВЕРХНОСТИ.** Многие поверхности в трехмерном евклидовом пространстве обладают тем свойством, что допускают существование непрерывного поля нормальных векторов. Таковы сфера, шар, эллипсоид и др. Непрерывное поле нормальных векторов на этих поверхностях можно построить в двух вариантах: а) выбрать внешнюю *нормаль* и б) внутреннюю *нормаль*. Каждый такой выбор определяет сторону поверхности, а сама поверхность считается двусторонней.

Однако существуют такие поверхности в пространстве, на которых невозможно задать непрерывное поле нормальных векторов (и тем самым выделить сторону поверхности, а также сторону, противоположную выделенной). Дело в том, что при распространении поля нормальных векторов с малого участка поверхности на более обширную область возможно такое явление: взяв в какой-либо точке поверхности нормальный вектор и непрерывно ведя его вдоль замкнутого пути, мы приходим к исходной точке с нормальным вектором, противоположным начальному. Такую поверхность называют О. п.

**Примером** О. п. является лист *Мёбиуса* (см. *Мёбиуса лист*).

Определение понятия потока векторного поля через поверхность содержит оговорку о том, что поверхность является двусторонней, а не О. п.

Класс О. п. в трехмерном пространстве совпадает с классом неориентируемых поверхностей (см. *Ориентируемая поверхность*).

Лит.: [90].

**ОДНОСТОРОННИЙ ПРЕДЕЛ** функции — общее название для *предела функции справа* или *предела функции слева*.

**ОДНОСТОРОННЯЯ КАСАТЕЛЬНАЯ** к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M_0$  — правая (или левая) касательная, т. е. предельное положение секущего луча  $M_0M$ , когда точка  $M$  стремится к  $M_0$ , оставаясь справа (соответственно слева) от точки  $M_0$ . На рисунке 32  $M_0N$  — правая и  $M_0P$  — левая касательные.



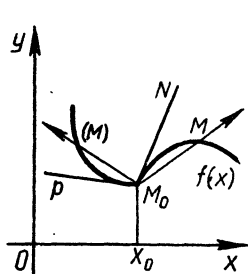


Рис. 32

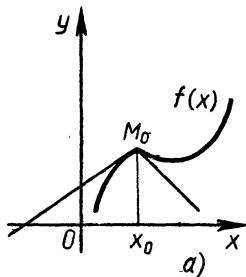
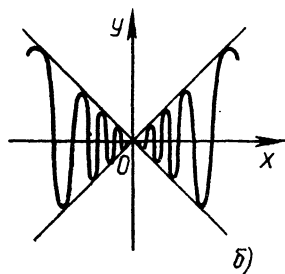


Рис. 33



**ОДНОСТОРОННЯЯ ПРОИЗВОДНАЯ** функции  $y = f(x)$  — конечный *односторонний предел*:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

При  $\Delta x \rightarrow +0$  О. п. называется правой производной, а при  $\Delta x \rightarrow -0$  — левой производной (предполагается, что функция  $f(x)$  определена в правой и соответственно левой полукрестности данной точки  $x_0$ ). В случае равенства правой и левой производных функция имеет производную; если же эти производные не равны, то точка  $(x_0, f(x_0))$  графика функции является угловой, односторонние касательные к графику функции образуют угол, отличный от нуля, и функция в точке  $x_0$  не имеет производной (рис. 33, а).

Если правая (левая) производная в данной точке существует, то функция непрерывна справа (слева) в этой точке (см. *Непрерывная справа (слева) функция*).  
Пример несуществования односторонних производных: функция

$$y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

не имеет ни правой, ни левой производной в точке  $x = 0$  (рис. 33, б).

**ОДНОЧЛЕН** — целое алгебраическое выражение, представляющее собой произведение двух или большего числа множителей, каждый из которых есть либо число, либо буква, взятая в некоторой положительной степени.

Одно число или одну букву в некоторой положительной степени также можно рассматривать как О. Примеры:  $2a^3b$ ;  $5x^6y^2z$  — одночлены. О., которые или ничем не отличаются, или отличаются только коэффициентами при одинаковых буквенных множителях, называются подобными. Например,  $-a$  и  $-a$ ;  $2ab$  и  $3ab$  подобные О.

**ОКРЕСТНОСТЬ ТОЧКИ:** О. т.  $a$  топологического пространства — это любое множество, содержащее точку  $a$  вместе с некоторым *открытым множеством*, которому она принадлежит.

**ОКРУГЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА** — замена этого числа приближенным значением его с определенной точностью. Обычно О. д. п. ч. заключается в отбрасывании конечного или бесконечного числа всех последних знаков (цифр) данного числа  $\alpha$ , начиная с некоторого разряда

(О. д. п. ч. по недостатку или с недостатком); при отбрасывании последних цифр (знаков), начиная с некоторой, предшествующая последняя цифра оставшегося («округленного») числа может быть увеличена на единицу (округление с избытком) или же оставлена без изменения (округление с недостатком).

**Пример.** О. д. п. ч.  $\alpha = 21,46$  с недостатком до разряда десятков дает число 20, стоящее ближе к числу  $\alpha$ , чем О. д. п. ч. с избытком, которое дает число 30.

О. д. п. ч. связано с понятием абсолютной погрешности, т. е. с разностью  $|\alpha - \alpha_0|$ , где  $\alpha$  — данное число, а  $\alpha_0$  — округленное число, т. е. приближенное значение данного числа.

О. д. п. ч. с точностью до  $10^{-n}$ , когда число записано десятичной дробью, иначе называется *десятичным приближением* действительного числа.

См. также: *Погрешность*.

Лит.: [95].

**ОКРУГЛЕНИЯ ТОЧКА** — см. *Круговая точка*.

**ОКРУЖНОСТИ КОНЦЕНТРИЧЕСКИЕ** — две окружности, имеющие общий центр и лежащие в одной плоскости. Отношение концентричности на множестве окружностей на плоскости является отношением эквивалентности. Неконцентрические же окружности иначе называют эксцентрическими или эксцентричными. Иногда О. к. называют концентричными. Сравните: *Конфокальные кривые*.

Лат. соп — вместе, centrum — центр.

**ОКРУЖНОСТЬ** — множество точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки, лежащей в той же плоскости и называемой ее центром. Расстояние от любой точки О. до ее центра обычно обозначается буквой  $r$  (или  $R$ ). Отрезок, соединяющий любую точку О. с ее центром, называется радиусом О.; радиусом О. называют также и длину этого отрезка. О. с центром А и радиусом  $r$  иногда обозначают (А;  $r$ ) или А ( $r$ ). О. с центром О и радиусом  $r$  делит плоскость, в которой она расположена, на две области: внутреннюю и внешнюю. К внутренней области относятся точки М плоскости, для которых расстояния  $|OM| < r$ , а к внешней области — точки К плоскости, для которых  $|OK| > r$ ; точки самой О. не принадлежат ни к внутренней, ни к внешней области, они являются граничными точками, а сама окружность (О;  $r$ ) есть граница каждого из этих множеств (областей).

Уравнение О. в прямоугольных декартовых координатах имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \quad (*)$$

где (а; b) — координаты центра, а  $r$  — радиус О. Из уравнения (\*) следует, что О. — кривая второго порядка. Для внутренних точек О. левая часть уравнения (\*) меньше  $r^2$ , а для внешних точек О. — больше  $r^2$ . О. — фигура (линия), аффинно-родственная эллипсу. Ортогональная проекция О. на плоскость, не перпендикулярную и не параллельную плоскости окружности, есть эллипс.

О. имеет постоянную кривизну в любой своей точке, равную  $1 : r$ . Длина окружности (О;  $r$ ) равна  $2\pi r$ , а площадь круга того же радиуса равна  $\pi r^2$ . О. нередко используется в геометрических построениях и при графическом решении уравнений и неравенств.

Параметрическое уравнение  $O$ . с центром в начале координат имеет вид:  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ , где  $x$ ,  $y$  — координаты точки  $M$ , принадлежащей  $O$ ,  $t$  — параметр (величина полярного угла).

Греч. *περιφέρεια* — окружность (периферия).

См. также: *Круг, Кольцо, Окружности концентрические, пи-Число, Сфера, Аполлония окружность, Окружность девяти точек.*

**ОКРУЖНОСТЬ АПОЛЛОНИЯ** — см. *Аполлония окружность*.

**ОКРУЖНОСТЬ ДЕВЯТИ ТОЧЕК** — окружность, на которой расположены середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины с *ортоцентром* треугольника. Центр  $O$ . д. т. совпадает с серединой отрезка, соединяющего ортоцентр данного треугольника с центром описанной вокруг него окружности. Радиус  $O$ . д. т. равен половине радиуса описанной вокруг данного треугольника окружности.

$O$ . д. т. иначе называется *о к р у ж н о с т ь ю Э й л е р а*.

См. также: *Фейербаха теорема*.

Лит.: [63].

**ОКРУЖНОСТЬ КРИВИЗНЫ** пространственной кривой  $\vec{M} = \vec{M}(t)$  в точке  $\vec{M}(t_0)$  — окружность, лежащая в соприкасающейся плоскости кривой в точке  $\vec{M}(t_0)$ , радиус которой равен  $\frac{1}{k}$ , где  $k$  — кривизна кривой в точке  $\vec{M}(t_0)$ , а центр расположен в точке  $\vec{M}(t_0) + \frac{1}{k} \vec{v}$ , где  $\vec{v}$  — единичный вектор *нормали*.  $O$ . к. не существует в точках кривой, кривизна в которых равна нулю.  $O$ . к. имеет с кривой касание не ниже второго порядка.  $O$ . к. иначе называется соприкасающейся окружностью.

Важным свойством  $O$ . к. является следующее: пусть  $O(t_0, t_1, t_2)$  — окружность, проведенная через три точки кривой, соответствующие значениям параметра  $t_0, t_1, t_2$ ; пусть  $t_2, t_1 \rightarrow t_0$ . Тогда окружность  $O(t_0, t_1, t_2)$  стремится к  $O$ . к.

Лит.: [61, 71].

**ОКТАНТ** — один из восьми прямых трехгранных углов, образованных от пересечения трех попарно взаимно перпендикулярных координатных плоскостей  $xOy$ ,  $xOz$ ,  $yOz$ .

Греч. *οκτώ* — восемь.

**ОКТАЭДР** — восьмигранник. Правильный  $O$ . — один из пяти типов *правильных многогранников*, гранями которого являются правильные треугольники. Правильный  $O$ . имеет 6 вершин, 8 граней и 12 ребер, т. е. является фигурой, свойственной правильному гексаэдру — кубу. Правильный  $O$ . имеет центр симметрии и 9 плоскостей симметрии, как и куб. Правильный  $O$ . легко получить из куба, если центры граней куба принять за вершины правильного  $O$ . Иногда  $O$ . называют *четыреугольной бипирамидой*.

Греч. *οκτώ* — восемь, *εδρά* — грань, опора, основание.

См. также: *Двойственности принцип, Многогранник*.

**ОПЕРАТОР** — в широком смысле слова — термин, являющийся синонимом терминов «отображение», «функция». Пусть даны два множества  $X$ ,  $Y$  и соответствие  $F$  между этими множествами, относящее каждому  $x \in X$  некоторый элемент  $y \in Y$  (обозначается  $y = F(x)$ ). В этом случае говорят, что *задан  $O$ .* из множества  $X$  в множество  $Y$ . Среди трех формально равноправных терминов —

**отображения, функция, О.** — традиция установила некоторое различие. Именно для абстрактных множеств  $X, Y$  (т. е. для множеств, не наделенных никакой дополнительной структурой) употребителен термин «отображение» и в меньшей степени «функция», «оператор»; для числовых множеств  $X, Y$  используют термин «функция»; если  $X$  — множество функций (обычно нескольких переменных), а  $Y$  — множество вещественных или комплексных чисел, то говорят, что задан функционал.

Термин **О.** употребляется особенно часто в том случае, когда отображение  $F: X \rightarrow Y$  отображает множество функций  $X$  в множество функций  $Y$  (здесь функции — элементы множеств  $X, Y$  являются обычно функциями одной или нескольких переменных).

Наиболее важным и изученным классом **О.** являются линейные операторы гильбертова пространства. Пусть  $X, Y$  — линейные пространства.  $O: F: X \rightarrow Y$  называется линейным **О.**, если  $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$ ,  $F(\lambda x) = \lambda F(x)$  для любых  $x_1, x_2 \in X$  и любого числа  $\lambda$ . Обычно рассматривают непрерывные линейные  $O: F: X \rightarrow Y$  для линейных топологических пространств  $X, Y$ . Линейный **О. F** называется непрерывным, если отображение  $F: X \rightarrow Y$  непрерывно в топологиях пространств  $X, Y$ .

Многие математические задачи, а также прикладные вопросы математики связаны с дифференциальными и интегральными линейными **О.**

**Примеры.** 1. Оператор дифференцирования  $F$  переводит всякую дифференцируемую функцию  $f(x)$  одного вещественного переменного в производную —  $f'(x)$ .

2. Линейное преобразование  $F$  линейного (векторного) конечномерного пространства  $L$  является линейным **О.** При выборе базиса в  $L$   $O: F$  может быть задан матрицей линейного преобразования.

3. Формула  $g(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$  определяет линейный **О.**, сопоставляющий каждой непрерывной функции  $f$  функцию  $g$ ; здесь  $K(x, y)$  — функция двух вещественных переменных, непрерывная для  $0 \leq x, y \leq 1$ .

4. **О. сдвига**  $F(f) = f(x + h)$ , определенный на множестве непрерывных на  $]-\infty; +\infty[$  функций  $f$ .

Лит.: [53].

**ОПЕРАТОРОВ ТЕОРИЯ** — часть функционального анализа, посвященная изучению свойств операторов, в основном линейных, и их применению к решению различных задач.

Лит.: [53].

**ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ** — совокупность методов прикладного математического анализа, позволяющих экономными средствами получать решения линейных дифференциальных уравнений, а также разностных и некоторых типов интегральных уравнений.

В связи с этим методы операционного исчисления находят самое широкое применение в механике, электротехнике, автоматике и в других самых разнообразных отраслях науки и техники. В основе операционного исчисления лежит идея функционального преобразования: некоторой функции вещественного переменного  $t$ , определенной при положительных значениях аргумента, называемой начальной функцией или оригиналом, с помощью линейного интегрального

преобразования ставится в соответствие функция другого переменного  $p$ , называемая изображением.

Подобное преобразование «оригинал—изображение» можно осуществить так, чтобы операциям дифференцирования и интегрирования начальных функций соответствовали алгебраические операции в области изображений. Это дает возможность находить с помощью простейших алгебраических действий изображения решений исходных дифференциальных уравнений, затем разыскать соответствующую начальную функцию, т. е. решение осуществляется с помощью некоторых простых правил и «каталога» наиболее часто встречающихся изображений. В более сложных задачах приходится прибегать к обратному функциональному преобразованию: «изображение—оригинал».

Систематическое применение операционного исчисления к решению физических и технических задач началось с появления в 1892 г. работ английского ученого О. Хевисайда. Сущность О. и. можно проиллюстрировать на примере с наиболее часто встречающимся в прикладных задачах классом начальных кусочно-непрерывных функций  $f(t)$  вещественной переменной  $t$ , определенных при  $t > 0$  и принимаемых равными нулю при  $t < 0$ . Из класса кусочно-непрерывных начальных функций выделяется и в дальнейшем рассматривается подкласс функций, характеризуемых определенным порядком роста при весьма больших значениях аргумента, а именно:  $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ , где  $M$  и  $s_0$  — независимые от  $t$  числа.

Если  $p = s + i\delta$  — некоторое комплексное число, то при указанных ограничениях, накладываемых на функцию  $f(t)$ , интеграл

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (*)$$

существует и представляет регулярную в полуплоскости  $\text{Re } p > s_0$  функцию от  $p$ , называемую лапласовым преобразованием функции  $f(t)$ , а также изображением начальной функции или оригинала  $f(t)$ .

Ряд свойств изображения (\*), например изображения производной  $f'(t)$ :

$$L\{f'(t)\} = pL\{f(t)\} - f(0)$$

и изображения интеграла:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^t f(t) dt, \\ L\{\psi(t)\} &= \frac{L\{f(t)\}}{p}, \end{aligned}$$

делают очевидным тот факт, что преобразование (\*) переводит операции дифференцирования и интегрирования в операции умножения и деления на комплексное переменное  $p$ .

Пользуясь основными свойствами изображения, составляются изображения некоторых простейших функций — «каталог» изображений. «Каталог» изображений простейших функций и теоремы разложения Хевисайда, дающие возможность отыскивать начальную функцию, когда изображение  $F(p)$  является *полиномом* или *отношением двух полиномов*, позволяют простейшим способом найти решение большой группы обыкновенных линейных дифференциальных и разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Однако многие задачи приводят к изображениям, не содержащимся в «каталоге». Существует общее средство построения начальной функции по ее изображению — так называемая формула обращения Римана — Меллина:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} F(p) dp,$$

где интегрирование производится по любой прямой в плоскости  $p = \sigma + iw$ , параллельной мнимой оси и расположенной в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq \sigma_1 > \sigma_0$ .

В математической физике при интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными применяется многомерное О. и.

Лит.: [57].

**ОПЕРАЦИЯ  $n$ -АРНАЯ** на множестве  $A$  — отображение  $f: A^n \rightarrow A$ , где  $A^n$  — декартова  $n$ -я степень множества  $A$  (см. *Декартово произведение*). Другими словами, О.  $n$ -а. — некоторый закон, сопоставляющий всякой упорядоченной  $n$ -ке  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  элементов из  $A$  элемент этого же множества  $A$ .

Примерами О.  $n$ -а. могут быть сложение и умножение ( $n = 2$  — *бинарная операция*) действительных чисел; *дифференцирование* можно рассматривать как О.  $n$ -а., где  $n = 1$  (унарная или монарная операция), на множестве дифференцируемых функций.

Частичной О.  $n$ -а. называется отображение  $f$  не всего множества  $A^n$  в  $A$ , а какого-либо подмножества  $B \subset A^n$  в  $A$ . Например, деление действительных чисел можно рассматривать как частичную бинарную операцию, так как деление  $0/0$  не определено.

Лит.: [48, 55].

**ОПИСАННЫЕ ФИГУРЫ:** 1°. О. ф. вокруг выпуклых многоугольников  $P$  или других выпуклых плоских фигур.  $\Phi$  — выпуклые фигуры  $M$ , на границах которых лежат вершины многоугольников  $P$  или некоторые граничные точки фигур  $\Phi$  и так, что фигуры  $P$  и  $\Phi$  являются *правильными частями* фигур  $M$ . Многоугольник  $P$  и выпуклая плоская фигура  $\Phi$  при этом называются *вписанными* в выпуклую фигуру  $M$ . О. ф. могут быть как ограниченными множествами (например, окружность, описанная около треугольника, рис. 34, а), так и неограниченными множествами, бесконечно протяженными (например, угол, описанный вокруг окружности, рис. 34, б). На рисунке 34, в многоугольник  $A_1 A_2 \dots A_n$  описан (является О. ф.) вокруг треугольника  $ABC$ ; на рисунке 34, г кривая  $\omega$  описана вокруг фигуры  $\Phi$ .

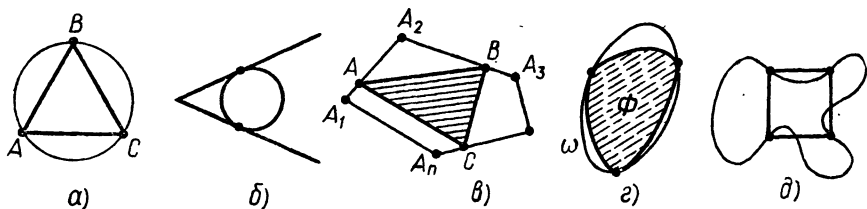


Рис. 34

Аналогично определяются О. ф. и в пространстве, где вместо выпуклых многоугольников рассматриваются выпуклые многогранники, а вместо выпуклых плоских фигур — выпуклые пространственные фигуры (сферы, шары, конусы и др.).

2°. Иногда в математике также говорят об О. ф., которые могут быть и не выпуклыми; например, на рисунке 34, д изображена невыпуклая (вогнутая) фигура  $\omega$ , описанная вокруг квадрата  $ABCD$ . В проективной геометрии также говорят о вписанном в кривую 2-го порядка (ряд точек 2-го порядка, коническое сечение) шестивершиннике (шестиугольнике, см. *Паскаля теорема*) и описанном вокруг кривой 2-го порядка шестистороннике (шестиугольнике), стороны которого принадлежат пучку прямых 2-го порядка (см. *Брианшона теорема*).

См. также: *Вписанная окружность, Вписанный многоугольник, Вписанный угол*.

Лит.: [63, 41].

**ОПОРНАЯ ПЛОСКОСТЬ** выпуклой фигуры — плоскость  $P$ , имеющая общие точки с границей этой фигуры и такая, что вся фигура лежит по одну сторону от нее, т. е. рассматриваемая фигура лежит в одном из замкнутых полупространств, определяемых плоскостью  $P$  (при этом сама плоскость  $P$  принадлежит полупространству). Можно доказать, что через каждую граничную точку выпуклой пространственной фигуры проходит О. п. к этой фигуре. Однако таких О. п. может быть бесконечно много; так, через вершину любой треугольной пирамиды проходит бесконечно много О. п. Плоскости, содержащие грани треугольной пирамиды, также являются О. п. этой пирамиды.

**П р и м е р ы.** 1. Для плоской фигуры О. п. является плоскость, в которой эта фигура расположена.

2. Для шара О. п. является касательная плоскость.

3. Для трехгранного угла О. п. являются плоскости его граней и каждая плоскость, проходящая через вершину и не содержащая внутренних его точек.

О. п. выпуклой фигуры называется также О. п. выпуклого множества точек.

Если выпуклая фигура есть тело (например, многогранник), то О. п. ее называют плоскость, имеющую общие точки с границей фигуры и не содержащую внутренних точек этой фигуры.

О. п. выпуклой фигуры называется также О. п. к выпуклой фигуре или О. п. для выпуклой фигуры.

См. также: *Опорная прямая*.

Лит.: [52, 2].

**ОПОРНАЯ ПРЯМАЯ** выпуклой фигуры на плоскости — прямая, имеющая общие граничные точки с фигурой и не содержащая ее внутренних точек. О. п. выпуклой фигуры  $\Phi$  — прямая  $l$ , содержащая граничные точки фигуры  $\Phi$  и такая, что вся фигура лежит в одной из замкнутых полуплоскостей, определяемой прямой  $l$  (при этом сама прямая  $l$  также присоединена к той же полуплоскости).

Можно доказать, что через каждую граничную точку выпуклой фигуры проходит О. п.; при этом таких О. п. может быть бесконечное множество. Если фигура  $\Phi$  пространственная и выпуклая, то понятие О. п. заменяется понятием *опорной плоскости*.

**Примеры.** 1. Всякая прямая, содержащая сторону треугольника, как и любая прямая, проходящая через вершину и не содержащая внутренних точек его, является О. п. этого треугольника. Таким образом, через каждую вершину треугольника проходит бесконечное множество О. п. треугольника.

2. Всякая касательная к окружности является О. п. круга, границей которого является эта окружность.

3. О. п. отрезка являются два пучка прямых с центрами, совпадающими с концами отрезка.

О. п. плоской выпуклой фигуры называют также О. п. к этой фигуре или О. п. для этой фигуры. О. п. фигуры называется также О. п. точечного множества на плоскости.

Понятие О. п., как и понятие опорной плоскости, используется при изучении геометрии выпуклых фигур.

Лит.: [52, 2].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПОНЯТИЯ** (объекта) — предложение, раскрывающее содержание (смысл) этого понятия. О. м. п. может быть дано различными способами: 1) сведение определяемого понятия к основным и ранее известным понятиям (в частности, таким понятиям, как «множество и его подмножество», «родовой признак» и «видовое отличие»); 2) генетическое или конструктивное определение, когда указывается способ образования (конструирования) определяемого понятия (объекта); 3) аксиоматическое определение понятия, когда понятия выступают как первичные, а связи между ними описываются аксиоматически, т. е. системой аксиом. Так, понятие натурального числа дается в аксиомах (через аксиомы) Пеано, понятие «расстояние» между двумя точками на плоскости или в пространстве дается в аксиомах метрического пространства и т. д.

Одному и тому же понятию в математике можно дать различные, но эквивалентные относительно принятой аксиоматики определения.

На ранней ступени изучения математики О. м. п. часто не дают, а сообщают понятия без определений, используя при этом описания понятий (нестрогие определения) или указания на модели определяемых понятий (понятие шара иллюстрируется его моделью: мячом; понятие куба — моделью его; понятие окружности — моделью ее — обручем, как это делается в детских садах и начальной школе). При одной аксиоматике некоторые понятия определяются, а при другой они могут быть приняты за основные.

См. также: *Высказывание, Достаточное условие, Необходимое условие, Геометрия, Аксиома.*

Лит.: [40, 62].

**ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ** (см. *Интегральное исчисление*) — важное понятие математического анализа. К вычислению О. и. сводятся многие задачи геометрии, механики, физики. Обозначается О. и.

$$\int_a^b f(x) dx$$

и по определению равен:

$$\lim_{I(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta_k,$$



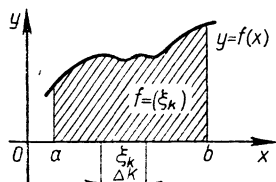


Рис. 35

где  $T$  — разбиение отрезка  $[a; b]$  на отрезки  $\Delta_k$ ,  $\xi_k$  — произвольная внутренняя точка отрезка  $\Delta_k$  (рис. 35),  $l(T)$  — длина наибольшего отрезка  $\Delta_k$  при разбиении  $T$ .

О. и. существует для функций, лебеговская мера (см. *Лебега интеграл*) множества точек разрыва которых равна нулю. Геометрический смысл О. и. — площадь *криволинейной трапеции*, ограниченной прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  и кривой  $y = f(x)$  (с учетом знака площади).

**ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ** (детерминант)  $n$ -го порядка — алгебраическая сумма  $n!$  слагаемых членов, составленных из элементов квадратной матрицы (таблицы):

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

по следующему закону: каждое слагаемое есть произведение  $n$  элементов, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы. Каждый член О. берется со знаком  $(-1)^t$ , где  $t$  — число инверсий во вторых индексах члена, когда первые индексы члена расположены в натуральном порядке.

Для обозначения О. используется символ:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

т. е. элементы матрицы заключаются в прямые вертикальные черточки. Этот символ был введен в XIX в. английским математиком Кэли. Следовательно,  $\det A = \sum (-1)^t a_{1i} a_{2j} \dots a_{nk}$ , где сумма берется по всем *перестановкам* из чисел  $1, 2, \dots, n$ , а  $t$  — число инверсий в подстановке  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & j & \dots & k \end{pmatrix}$ .

Очевидным образом можно толковать О. как числовую функцию на множестве всех квадратных матриц.

О. обладает рядом свойств, которые лежат в основе практических способов их вычислений. Основные свойства О. следующие: 1) О. не изменяется при *транспонировании* матриц (строк и столбцов); 2) если один из столбцов (строк) состоит из нулей, то О. равен нулю; 3) если один О. получен из другого О. перестановкой двух столбцов (строк), то О. отличаются друг от друга знаком; 4) О., содержащий два пропорциональных, в частности два равных, столбца (строки), равен нулю; 5) О. не меняется, если к какому-либо столбцу (строке) прибавить линейную комбинацию других столбцов (строк); 6) если все элементы какого-либо столбца (строки) О. умножить на некоторое число  $k$ , то весь О. умножается на  $k$ , т. е. общий множитель любой строки или любого столбца можно выносить за знак О.; 7) если элементы какого-либо  $i$ -го столбца (строки) О. являются суммами двух слагаемых, то такой О. равен сумме двух О., в первом из которых в качестве  $i$ -го столбца (строки) взяты первые слагаемые, а во втором — вторые

слагаемые; при этом элементы всех остальных строк (столбцов) у каждого из трех определителей одинаковы.

Свойство 2) и более общее свойство 4) дают лишь достаточные условия для равенства нулю  $O$ . Необходимое и достаточное условие равенства нулю  $O$  с элементами из поля  $K$  состоит в том, чтобы какой-либо столбец (строка) был линейной комбинацией других столбцов (строк).

$O$  имеют многочисленные приложения к различным вопросам математики и физики. См., например: *Крамера правило* и опирающуюся на него *Кронекера — Капелли теорему*, *Вронскиан*, *Грамма определитель* и т. д.

Начало зарождения теории  $O$  относится, по-видимому, к концу XVII в. Лейбниц (1693) в одном из писем Лопиталю сообщает, что он сделал открытие, пользуясь системой двойных индексов коэффициентов уравнений. Однако результаты Лейбница не были опубликованы, поэтому они остались неизвестными.

В 1750 г. Крамер указывает общий закон составления  $O$  и общие формулы для решения систем  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными. Общая теория  $O$  была начата Вандермондом (1771) и дальнейшее существенное развитие получила (1812) в работах Бине и Коши.

В настоящее время  $O$  применяются почти во всех разделах математики, а также в очень многих ее приложениях.

Лит.: [42, 47, 79].

**ОРДИНАЛЬНОЕ ЧИСЛО** — то же самое, что и порядковое число.  $O$  ч. названо в противоположность понятию *кардинального числа*, или количественного числа. См. *Трансфинитные числа*.

Лат. ordinalis — порядковый.

**ОРДИНАТА** — вторая по порядку из координат (прямоугольных декартовых или аффинных) точки на плоскости или в пространстве.  $O$  точки обычно обозначается буквой  $y$ .

Лат. ordinatus — упорядоченный.

**ОРИЕНТАЦИЯ:** 1°.  **$O$ . базисов.** Говорят, что два базиса (два репера  $n$ -мерного пространства  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  и  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$ ) одинаково ориентированы, если линейное преобразование  $A\vec{e}_i = \vec{f}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  задается *матрицей*  $A$  с положительным *определителем*. Если же матрица преобразования  $A$  имеет отрицательный определитель, то базисы  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  и  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$  ориентированы различно.

2°.  **$O$ . поверхности.** Разобьем поверхность на частично налегающие друг на друга куски  $\omega_i$  такие, что уравнение каждого куска может быть дано в виде:

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), 0 < u < 1, 0 < v < 1$$

(для поверхности в целом такие уравнения, вообще говоря, написать невозможно).

На каждом таком куске задается два векторных поля (два упорядоченных линейно независимых касательных вектора в каждой точке поверхности, непрерывно зависящих от точки). Каждая пара указанных векторных полей задает  $O$  куска. Две пары векторных полей задают одну и ту же  $O$  куска, если в любой точке куска векторы  $\vec{\xi}_1$  и  $\vec{\eta}_1$  первой пары векторных полей одинаково ориентиро-

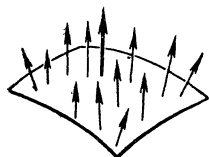


Рис. 36

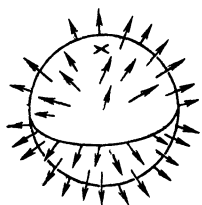


Рис. 37

ваны с  $\vec{\xi}_2$ ,  $\vec{\eta}_2$  — векторами второй пары векторных полей. В противоположном случае две пары векторных полей задают различные ориентации.

Если куски  $w_i$ , покрывающие поверхность, можно ориентировать так, чтобы на пересечениях  $w_i \cap w_j$  совпадали ориентации кусков  $w_i$  и  $w_j$ , то поверхность называется ориентируемой, а ее  $O$ . определяется  $O$ . каждого из кусков.

Для наглядности вместо пары векторных полей рассматривается на каждой поверхности векторное произведение векторов из векторных полей. Тогда в каждом куске задается поле векторов, ортогональных поверхности и направленных в «одну сторону» от поверхности. Если на каждом куске (рис. 36) рассмотреть такое поле и если на пересечении  $w_i \cap w_j$  поля  $w_i$  и  $w_j$  совпадают по направлению, говорят, что поверхность ориентируемая и задана ее  $O$ . Отсюда непрерывное семейство нормальных к поверхности векторов задает  $O$ . поверхности. Та сторона

поверхности, куда направлены нормальные векторы, называется положительной стороной относительно данной  $O$ .

**Примеры.** 1. Семейство векторов (рис. 37), ортогональных сфере и направленных от центра, задает  $O$ . сферы, объявляя положительной внешнюю сторону поверхности сферы. Возможна другая  $O$ . Ее задают нормальные векторы сферы, направленные внутрь сферы.

2. На листе Мёбиуса невозможны непрерывные семейства ненулевых нормальных векторов. Лист Мёбиуса неориентируем.

3°.  $O$ . несамопересекающейся кривой — один из двух возможных способов «движения» вдоль кривой.

4°.  $O$ . гладкого многообразия  $M$ . Пусть карта, принадлежащая атласу, задает гладкую структуру на  $M$ . В касательном пространстве каждой точки  $x \in S \subset M$  можно выбрать (непрерывно зависящий от  $x$ ) базис. Если это сделано для каждой карты и при этом отображения  $\varphi_{ij} : E_i \rightarrow E_j$ , связанные с  $S_i \cap S_j$ , имеют в каждой точке положительный якобиан., то говорят, что задана  $O$ . многообразия.

См. также: *Односторонние поверхности, Ориентируемые поверхности.*

Лит.: [68].

**ОРИЕНТИРУЕМЫЕ ПОВЕРХНОСТИ** в трехмерном евклидовом пространстве. Если поверхность  $S$  принадлежит евклидову пространству  $E^3$ , то на  $S$  определено одномерное векторное расслоение  $\xi$ , называемое нормальным векторным расслоением. Слоем  $\xi$  над точкой  $x \in S$  является нормаль к поверхности  $S$  в точке  $x$ . Если расслоение  $\xi$  является одномерным тривиальным расслоением, то поверхность  $S$  называется  $O$ . п. (Расслоение называется тривиальным, если пространство расслоения гомеоморфно прямому произведению базы расслоения на слой.) Ориентация поверхности — выбор одного из двух возможных непрерывных векторных полей из единичных нормальных векторов. Всякая поверхность

в евклидовом пространстве, ограничивающая часть пространства, является ориентируемой, например: сфера, тор и др.

Рассматривают также ориентируемые гладкие многообразия. Для гладкого компактного многообразия  $M$  размерности  $n$  определено касательное векторное расслоение. Внешняя  $n$ -я степень (см. *Внешняя алгебра*) касательного расслоения есть одномерное расслоение над  $M$ . Если это расслоение тривиально, то многообразие  $M$  ориентируемо, в противном случае неориентируемо. Аналогичным образом определяется понятие ориентируемости любого векторного расслоения  $\eta_m$  размерности  $m$  над  $M$ . При этом в случае ориентируемости расслоения  $\eta_m$  группа расслоения содержится в  $SO(m)$ ; в случае неориентируемости группа расслоения содержится в  $O(m)$  и не вписывается в  $SO(m)$ . Здесь  $SO(m)$  — специальная ортогональная группа (изоморфная группе ортогональных матриц с определителем единица),  $O(m)$  — ортогональная группа (изоморфная группе всех ортогональных матриц с определителем  $\pm 1$ ).

Неориентируемой поверхностью в трехмерном евклидовом пространстве является лист Мёбиуса (см. *Мёбиуса лист*), примером неориентируемого многообразия является вещественное проективное пространство четной размерности (см. также *односторонние поверхности*).

Часто рассматривают согласование ориентаций куска поверхности и ограничивающей его замкнутой кривой (см. *Стокса формула*).

Лит.: [71, 72].

**ОРИСФЕРА** — поверхность в пространстве Лобачевского, образованная вращением *орицикла* вокруг одной из его осей.  $O$ . — одна из трех основных типов поверхностей в пространстве Лобачевского ( $O$ ., *сфера* и *гиперсфера*).  $O$ . можно определить и как множество концов секущих равного наклона, проведенных из некоторой точки  $M$  прямой  $a$  ко всем прямым пространства Лобачевского, параллельным этой прямой в определенном направлении. Точка  $M$  считается точкой, принадлежащей  $O$ . Прямая  $a$  при этом называется осью  $O$ . Задание  $O$ . определяется заданием прямой  $a$  (осью) и точкой  $M$ , принадлежащей этой прямой.

$O$ . есть пространственный аналог орицикла. Все  $O$ . конгруэнтны друг другу. На  $O$ . выполняются все предложения *абсолютной геометрии*, если под «точкой» понимать точку  $O$ ., под «прямой» — орицикл  $O$ . и выполнение некоторых других соглашений. Тогда доказывается, что через две различные точки  $O$ . проходит одна и только одна «прямая» (орицикл) и другие предложения.

Более детальное изучение внутренней геометрии на  $O$ . показывает, что на ней выполняется планиметрия Евклида, и в частности аксиома о параллельных. На  $O$ . существуют подобные и неконгруэнтные треугольники, что, как известно, имеет место в геометрии Евклида и равносильно аксиоме о параллельных (или пятому постулату Евклида).

$O$ . иначе называется предельной поверхностью.

См. также *Псевдосфера*.

Лит.: [33, 62].

**ОРИЦИКЛ** — одна из трех основных типов кривых в плоскости Лобачевского (окружность,  $O$ ., *гиперцикл*).  $O$ . — это множество концов *секущих* равного наклона, проведенных из некоторой точки  $A$  прямой  $a$  ко всем прямым, параллельным ей в определенном направлении и лежащим с ней в одной плоскости

Лобачевского. Точка  $A$  считается точкой  $O$ .; прямая  $a$  называется осью  $O$ . Всякая прямая, параллельная оси  $O$ ., также может быть принята за ось этой кривой.

Всякая прямая пересекает  $O$ . не более чем в двух точках. Все  $O$ . конгруэнтны друг другу. Пространственным аналогом  $O$ . в геометрии Лобачевского является *срисфера*. В отличие от окружности  $O$ . является незамкнутой линией в плоскости Лобачевского, как и *эвидистанта* (гиперцикл).  $O$ . может «скользить» сам по себе без деформации, как окружность и прямая.  $O$ . можно рассматривать как предельное положение окружности, когда центр ее удаляется в бесконечность по *нормали* (в сторону параллельности осей  $O$ .).  $O$ . имеет постоянную кривизну.

Через три различные точки, лежащие на  $O$ ., провести окружность нельзя, в то время через три неколлинеарные точки в плоскости Евклида всегда можно провести окружность, и притом только одну.

Лит.: [33, 62].

**ОРТ** — вектор, евклидова пространства, длина которого равна единице. Если дан вектор  $\vec{a}$ , то его  $O$ . (обозначим его через  $\vec{e}$ ) можно выразить так:  $\vec{e} = \vec{a} : |\vec{a}|$ , где  $|\vec{a}|$  — длина вектора  $\vec{a}$ . Всякий вектор на плоскости можно разложить по двум неколлинеарным векторам  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ :  $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ , где  $x, y$  — координаты вектора  $\vec{a}$ , а  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  — единичные векторы осей координат  $Ox$  и  $Oy$ . Всякий вектор в трехмерном евклидовом пространстве можно разложить по трем некопланарным векторам  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ :  $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ , где  $x, y, z$  — координаты вектора  $\vec{a}$ , а  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  — единичные векторы осей  $Ox, Oy, Oz$ . Обычно  $O$ . в прямоугольной декартовой системе координат обозначают через  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , они направлены по осям координат  $Ox, Oy, Oz$ , соответственно и задают направление этих осей; эти  $O$ . обычно изображают векторами, имеющими общее начало — начало координат.

Лат. orientation — ориентация, т. е. направление данного вектора или данной оси. Греч. орбоϛ — прямой.

См. также: *Репер, Базис векторного пространства*.

**ОРТОГОНАЛЬНАЯ МАТРИЦА** — невырожденная матрица, обратная к которой совпадает с ее транспонированной матрицей.

Существует много других, эквивалентных приведенному определений  $O$ . м. Важность понятия  $O$ . м. предопределена тем, что  $O$ . м. соответствуют ортогональные линейные преобразования неизвестных (см. *Ортогональное преобразование*).

**ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ; 1º.**  $O$ . п. точки на прямую  $l$  (на плоскость  $\alpha$ ) — основание перпендикуляра, проведенного через данную точку к прямой  $l$  (к плоскости  $\alpha$ ).  $O$ . п. точки на прямую (на плоскость) есть частный случай *параллельной проекции*.

**2º.**  $O$ . п. фигуры на прямую  $l$  (на плоскость  $\alpha$ ) — множество  $O$ . п. всех точек данной фигуры на прямую  $l$  (на плоскость  $\alpha$ ).

См. также: *Проекция, Чертеж, Аксонометрия*.

**ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ**  $n$ -мерного евклидова пространства — линейное преобразование, сохраняющее длину каждого вектора.  $O$ . п. есть обобщение вращений трехмерного евклидова пространства вокруг начала координат (быть может, с отражениями) на многомерный случай. В ортонормаль-

ном базисе матрица  $\|a_{ij}\|$  О. п. обладает следующими свойствами:

1) сумма квадратов элементов одной строки (одного столбца) равна единице:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 1;$$

$$2) \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{kj} = 0, i \neq k; \sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = 0, i \neq j.$$

Матрица  $\|a_{ij}\|$ , обладающая свойствами 1) и 2), называется ортогональной. Матрица  $A^{-1}$ , обратная ортогональной матрице  $A$ , совпадает с транспонированной  $A'$ . Все собственные значения ортогональной матрицы или О. п. по модулю равны единице. Совокупность всех О. п. образует группу, которая называется ортогональной группой.

Справедлива теорема: всякую квадратичную форму О. п. переменных можно привести к сумме квадратов с некоторыми коэффициентами. Эти коэффициенты вещественны; если коэффициенты квадратичной формы вещественны.

Примеры. 1. Вращение трехмерного евклидова пространства вокруг начала координат есть О. п.

2. Преобразование переменных  $y_i = -x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ортогонально относительно скалярного произведения  $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

3. Матрица

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ортогональна.

4. Если  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  и  $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$  — системы ортонормальных векторов, то линейное преобразование  $A$ , задаваемое формулами:  $A(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , есть О. п.

Пусть  $a_{ij}$  означает косинус угла между  $\vec{e}_i$  и  $\vec{f}_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Тогда матрица, составленная из этих коэффициентов, есть ортогональная матрица. В базисе  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  она задает О. п. А О. п. рассматривается во многих отделах математики. В частности, в аналитической геометрии задача о приведении уравнения кривой (поверхности) 2-го порядка к каноническому виду эквивалентна задаче о приведении квадратичной формы О. п. к сумме квадратов с некоторыми коэффициентами.

Различают собственные и несобственные О. п. *Определитель* матрицы собственных О. п. равен +1, а несобственных —1. Несобственные О. п. есть вращения евклидова пространства вокруг начала координат с отражением.

Лит.: [79].

**ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ** — кривые, пересекающие под прямым углом каждую из линий или каждую из поверхностей заданного семейства,

Например, гиперболы  $\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$  являются О. т. семейств эллипсов

$\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{\mu^2 - c^2} = 1$  (см. *Софокусные кривые*), где  $\lambda, \mu$  — параметры семейства.

**ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ.** Пусть в некотором линейном пространстве функций определено *скалярное произведение*. Две функции этого пространства  $f$  и  $g$  ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю. Например, четная функция  $f$  и нечетная  $g$  ортогональны на отрезке  $[-a; a]$  относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int_{-a}^a f(x) g(x) dx.$$

**ОРТОНОРМИРОВАННАЯ СИСТЕМА ФУНКЦИЙ** относительно некоторого скалярного произведения — система функций  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$  такая, что *скалярный квадрат* каждой функции семейства равен единице, а скалярные произведения любых двух различных функций системы равны нулю. Например, система функций:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \text{ где } n \in N,$$

образует О. с. ф. относительно скалярного произведения:

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx.$$

Одной из главных задач теории О. с. ф. является задача о разложении функции в ряд по О. с. ф.:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(x). \quad (*)$$

Предполагая возможность почленного интегрирования, получаем формулу для коэффициентов  $C_n$  (скалярное произведение в данном случае записывается:

$$(f, g) = \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx,$$

где  $p(x)$  — некоторая функция — «вес»):

$$C_n = \int_a^b p(x) f(x) \Phi_n(x) dx.$$

Если  $a = -\pi$ ,  $b = \pi$ ,  $p(x) = 1$ , то разложение  $(*)$  — обычное разложение функции  $f$  в *Фурье ряд*.

Теория О. с. ф. находит свое основное применение в решении краевых задач уравнений математической физики.

**ОРТОЦЕНТР** треугольника — точка пересечения высот треугольника. Существует ряд теорем относительно О. треугольника, например: 1) *Центроид* треугольника, центр описанного круга и О. треугольника лежат на одной прямой. 2) О. треугольника  $ABC$  (рис. 38) является центром окружности, вписанной в треугольник  $KLM$ , вершины которого есть основания высот треугольника  $ABC$ . 3) О. остроугольного треугольника лежит внутри его, тупоугольного треугольника — вне его и прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла. Понятие О. иногда используется при решении геометрических задач на

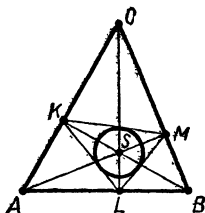


Рис. 38

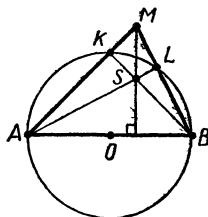


Рис. 39

построение. Например, дан (начерчен) круг с диаметром  $AB$  (рис. 39) и точка  $M$  вне его. Построить к прямой  $AB$  перпендикуляр, проходящий через точку  $M$ , пользуясь только одной линейкой. Центр окружности не дан. Построение выполняется следующим образом. Проводим прямые  $AM$  и  $BM$ , получаем точки пересечения этих прямых с окружностью — точки  $K$  и  $L$ . Затем проводим отрезки  $AL$  и  $BK$  — высоты треугольника  $ABM$ . Точка пересечения  $S$  высот  $AL$  и  $BK$  есть  $O$  — треугольника  $ABM$ , следовательно, третья высота треугольника пройдет через точку  $S$ ; отсюда прямая  $MS$  — искомая. Если точка  $M$  проектируется на продолжение диаметра  $AB$ , то построение перпендикуляра выполняется несколько иначе; если прямая  $BM$  (или  $AM$ ) имеет с окружностью только одну общую точку  $B$  (или  $A$ ), то прямая  $BM$  (или  $AM$ ) и будет искомым перпендикуляром. Греч. *орѳос* — прямой, правильный; лат. *centrum* — центр.

**ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ** — см. *Симметрия*  $1^{\circ}$ .

**ОСЕВОЙ ВЕКТОР** — вектор  $\vec{a}$  (обычный, полярный) в ориентированном пространстве, который при изменении ориентации пространства на противоположную преобразуется в противоположный вектор  $(-\vec{a})$ .

**П р и м е р ы.** 1. *Векторное произведение* двух векторов является *О. в.*, так как оно изменяется на противоположный вектор при переходе от левой системы координат к правой или обратно.

2; Угловая скорость вращения твердого тела вокруг некоторой оси является *О. в.*, так как ее можно изобразить вектором, направленным в ту или другую сторону оси вращения, в зависимости от выбора положительного направления этой оси,

*О. в.* также называют псевдовектором или аксиальным вектором.

**ОСНОВАНИЕ ПИРАМИДЫ** — многоугольная грань пирамиды, лежащая в плоскости, не проходящей через вершину многогранного угла, и пересекающая все грани этого угла. Если *О. п.* — треугольник, то пирамида называется треугольной; если же *О. п.* —  $n$ -угольник ( $n > 3$ ), то пирамида называется  $n$ -угольной. У  $n$ -угольной пирамиды ( $n > 3$ ) *О. п.* — многоугольник, все же остальные грани являются треугольниками, имеющими общую вершину — вершину пирамиды. За основание треугольной пирамиды может быть принята любая ее грань.

**ОСНОВАНИЕ ПОЗИЦИОННОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ** — любое натуральное число  $g \geq 2$ . Всякое натуральное число в системе счисления с *О. п. с. с.*  $g$  может быть записано с помощью множества не более  $g$  различных знаков, на зы-



ваемых цифрами (символами):  $0, 1, 2, \dots, (g - 1)$ . Например, число  $g_1 g_2 g_3 \dots g_n$ , где  $g_i$  — одно из чисел  $0, 1, 2, \dots, (g - 1)$ , может быть записано в виде

$$g_1 g^{n-1} + g_2 g^{n-2} + \dots + g_{n-1} g + g_n.$$

Если О. п. с. с.  $g$  мало, например  $g = 2$ , то сравнительно небольшое натуральное число будет иметь громоздкие, длинные записи (представления); если же О. п. с. с.  $g$  велико, например  $g = 60$ , то в этой системе счисления придется создавать 60 различных символов-цифр от 0 до 59, что представляет определенные и излишние трудности при записях чисел и тем более при действиях над ними. Позиционная система счисления с основанием  $g=10$  весьма распространенная; она называется *десятичной системой счисления*.

См. также: *Позиционная система счисления, Непозиционная система счисления, Двоичная система счисления, Счисление, Нумерация, Обращенное число.*

**ОСНОВАНИЕ СТЕПЕНИ**  $a^\alpha$  — число  $a$ . Число  $\alpha$  — показатель степени.

См. также: *Степень, Возведение в степень, Число.*

**ОСНОВАНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА** — любая из его сторон, которая выделяется по каким-либо соображениям из сторон треугольника. Например, если на сторону  $AB$  опущена высота из противоположной вершины  $C$  треугольника, то сторона  $AB$  — О. т. Основанием равнобедренного треугольника  $ABC$ , у которого  $|AC| = |BC|$ , называется сторона  $AB$  этого треугольника.

**ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ** — математическая дисциплина, изучающая дедуктивное (аксиоматическое) построение различных геометрий: элементарной геометрии (евклидовой), геометрии Лобачевского и др.

В О. г. входит также вопрос об истории попыток доказательства постулата Евклида, общие вопросы исследования системы аксиом: *непротиворечивость, независимость* и *полнота*. При изучении О. г. студенты педагогических институтов и университетов знакомятся с ролью аксиоматического метода в математике.

Лит.: [33, 62].

**ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ** комплексных чисел — см. *Алгебры основная теорема*.

**ОСОБАЯ ТОЧКА:** 1°. О. т. кривой, заданной уравнением  $F(x, y) = 0$ , — точка  $P_0(x_0, y_0)$  такая, что  $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} = \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} = 0$ .

Из уравнения  $F(x, y) = 0$  ни одно из переменных  $x, y$ , вообще говоря, не может быть выражено как функция другого даже в как угодно малой окрестности точки  $P_0$ . Если вторые частные производные не все одновременно обращаются в нуль в точке  $P_0$ , то поведение кривой в окрестности  $P_0$  во многом определяется знаком  $\Delta$ :

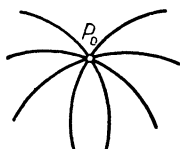


Рис. 40

$$\Delta = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{P_0} \cdot \left. \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right|_{P_0} - \left( \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right|_{P_0} \right)^2.$$

Если  $\Delta > 0$ , то О. т. изолированная (например, начало координат для кривой  $y^2 - x^3 + x^2 = 0$ ); если  $\Delta < 0$ , то в этой О. т. кривая самопересекается (например, кривая  $x^2 - y^2 = 0$  имеет начало координат точкой самопересечения); если  $\Delta = 0$ , то необходимо более глубокое исследование вопроса о характере особой точки.

2°. О. т. в теории дифференциальных уравнений — точка  $P_0$ , в которой одновременно обращаются в нуль числитель и знаменатель правой части уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A(x, y)}{B(x, y)},$$

где  $A(x, y)$  и  $B(x, y)$  непрерывны вместе со своими первыми производными в  $P_0$ .

Для исследования *интегральных кривых* в окрестности особой точки составляют характеристическое уравнение матрицы:

$$\begin{pmatrix} \left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_{P_0} & \left. \frac{\partial B}{\partial y} \right|_{P_0} \\ \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{P_0} & \left. \frac{\partial A}{\partial y} \right|_{P_0} \end{pmatrix}, \text{ т. е. } \begin{vmatrix} \left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_{P_0} - \lambda & \left. \frac{\partial B}{\partial y} \right|_{P_0} \\ \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{P_0} & \left. \frac{\partial A}{\partial y} \right|_{P_0} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если корни этого уравнения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны и  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ , то О. т. называется узлом. Качественно интегральные кривые в узле имеют вид, изображенный на рисунке 40.

Если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  и  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ , то О. т. есть седло. При комплексных, но не чисто мнимых  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  О. т. есть фокус кривой. Всякая интегральная кривая бесконечное число раз закручивается вокруг фокуса.

Чисто мнимые корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  не определяют полностью характер О. т. Этот случай и случай  $\lambda_1 \lambda_2 = 0$  представляют предмет более глубокого исследования.

3°. О. т. однозначной аналитической функции (см. *Аналитическая функция*) — точка, в которой нарушается аналитичность функции. Если существует окрестность О. т., не содержащая других О. т., то точка называется *изолированной*. Изолированная О. т.  $z_0$  называется *устранимой*, если существует

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z), \quad (*)$$

Если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  (\*), то О. т.  $z_0$  называется *полюсом*, а если предел (\*)

не существует в расширенной плоскости комплексного переменного, то  $z_0$  называется *существенно* О. т. Ряд Лорана (см. *Ряд Лорана*) не содержит отрицательных степеней  $z - z_0$ , если  $z_0$  является *устранимой*, не содержит  $z - z_0$  в степени меньшей, чем  $-p$  ( $p$  — целое положительное число), если  $z_0$  является *полюсом* (наибольшее такое  $p$  называется *порядком полюса*). В *существенно* О. т.  $z - z_0$  встречается в отрицательной степени бесконечно много раз.

Справедлива *теорема*: на границе круга сходимости степенного ряда функции существует по крайней мере одна О. т. функции, представляемая этим рядом.

**ОСОБЕННАЯ МАТРИЦА** — см. *Вырожденная матрица*.

**ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН** приближенной формулы — разность между точным и приближенным значениями представляемых данной формулой выражений.

Задача исследования О. ч. состоит в том, чтобы получить для него оценки. Например, приближенной формуле  $\sqrt{2} \approx 1,41$  соответствует точное равенство  $\sqrt{2} = 1,41 + R$ , где  $R$  является О. ч. приближения 1,41 к числу  $\sqrt{2}$  и известно, что  $0,004 < R < 0,005$ .

Существует О. ч. в формулах, дающих приближенное представление функций. Так, в *Тейлора формуле* О. ч.  $R_n(x)$  в форме Лангранжа имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1},$$

где  $h = x - a$ ,  $\theta$  — некоторое число, причем  $0 < \theta < 1$ . В этом случае оценка О. ч. зависит от поведения  $(n+1)$ -й производной. Можно говорить об О. ч. квадратурной формулы, формулы суммирования, интерполяционных формул.

**ОСТРОГРАДСКОГО МЕТОД** — метод выделения рациональной части неопределенного интеграла

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad (*)$$

где  $P$  — многочлен степени  $n$ ,  $Q$  — многочлен степени  $m \leq n$  и рациональная дробь  $P(x)/Q(x)$  несократима.

О. м. дает возможность, пользуясь чисто алгебраическими приемами, интеграл  $(*)$  представить в виде двух слагаемых: *рациональной функции* и неопределенного интеграла, являющегося *трансцендентной функцией*:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx, \quad (**)$$

где  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $P_1$  и  $P_2$  — многочлены соответственно степеней  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $m_1$  и  $m_2$ , причем  $n_1 + n_2 = n$ ,  $m_1 \leq n_1 - 1$ ,  $m_2 \leq n_2 - 1$ . Многочлен  $Q_1$  является *наибольшим общим делителем* многочлена  $Q$  и его производной  $Q'$ , т. е. может быть получен, например, *Евклида алгоритмом*. Многочлен  $Q_2$  равен частному  $Q/Q_1$  и поэтому не содержит кратных корней. Коэффициенты многочлена  $P_1$  и  $P_2$  могут быть получены *неопределенных коэффициентов методом*. Для этого следует представить их в коэффициентами, подлежащими определению, число которых не более  $n$ , приравняв коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного  $x$  в тождестве

$$Q_2(x) P_1'(x) - P_1(x) \frac{Q_1'(x) Q_2(x)}{Q_1(x)} + P_2(x) Q_1(x) \equiv P(x),$$

которое получается из равенства  $(**)$  дифференцированием.

О. м. был предложен русским математиком М. В. Остроградским в 1844 г.

**ОСТРОГРАДСКОГО ФОРМУЛА.** Пусть  $S$  — гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая область  $V$  в трехмерном евклидовом пространстве;  $\vec{F}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  — векторное поле, определенное в  $V$  и на  $S$  и такое, что все частные производные функций  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  непрерывны в  $V$ .

О. ф. имеет вид:

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \quad (*)$$

где  $S^+$  — поверхность с ориентацией, определяемой внешней нормалью  $\vec{n}$ .

О. ф. допускает следующую гидромеханическую интерпретацию. Пусть  $\vec{F}(x, y, z)$  — поле скоростей движущейся жидкости. Интеграл  $\iint_{S^+} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma$

численно равен количеству жидкости, вытекающему из тела  $V$  через поверхность  $S^+$  в единицу времени (поток поля  $\vec{F}$  через поверхность  $S^+$ ). С другой стороны,  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  (см. *Дивергенция*) равна пределу отношения потока векторного поля через границу  $S$  малого объема  $\Delta V$  к величине объема  $\Delta V$ , когда область стягивается к точке. Алгебраическая сумма количеств жидкости, вытекающих из объемов  $\Delta V_i$  в единицу времени, равна количеству жидкости, вытекающему за единицу времени через граничную поверхность  $S$  (поскольку потоки между соседними объемами взаимно сокращаются). В терминах *векторного анализа* О. ф. может быть записана следующим образом:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dv = \iint_{S^+} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma. \quad (**)$$

В  $n$ -мерном евклидовом пространстве О. ф. имеет вид, аналогичный (\*\*), где  $\vec{F} = \sum P_i \vec{e}_i$ ,  $P_i$  — функция декартовых координат  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\vec{e}_i$  — единичные орты осей координат,  $\vec{n}$  — внешняя единичная нормаль к поверхности  $S$ . Если уравнение поверхности  $S$  имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \text{ то } \pm \vec{n} = \operatorname{grad} f / |\operatorname{grad} f|, \operatorname{grad} f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i,$$

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2}.$$

О. ф. была установлена русским математиком М. В. Остроградским в 1828, а опубликована в 1831 г.

О. ф. родственна формулам Ньютона — Лейбница (см. *Ньютона — Лейбница теорема*) Грина формуле, Стокса формуле, устанавливающим связь интегралов по области и по границе. Лит.: [94].

**ОСТРЫЙ УГОЛ** — угол, величина которого меньше величины прямого угла, т. е. меньше  $90^\circ$ . Иначе, О. у. — угол, величина которого меньше величины смежного с ним угла.

**ОСЬ СИММЕТРИИ** фигуры — прямая  $l$ , все точки которой остаются неподвижными (при действии симметрии), любая точка  $A$  фигуры отображается в точку  $A'$ , симметричную точке  $A$  относительно прямой  $l$  и принадлежащую той же фигуре.

**П р и м е р ы.** 1. Прямая, проходящая через центр сферы, будет О. с. сферы.

2. Прямая, содержащая биссектрису угла, будет О. с. угла.

3. Прямая, проходящая через центры противоположных граней куба, является его О. с.

**ОСЬ СИММЕТРИИ** ( $n$ -го порядка) фигуры — прямая, при повороте фигуры вокруг которой на наименьший угол  $\varphi = 360^\circ : n$  фигура отобразится сама на себя. Если положить  $n = 4$ , то угол поворота фигуры вокруг оси будет равен  $90^\circ$  ( $\varphi = 360^\circ : 4 = 90^\circ$ ); в этом случае фигура будет иметь ось симметрии 4-го порядка.

Например, прямая, соединяющая центры симметрии противоположных граней куба, является О. с. его 4-го порядка. Всякая ось симметрии 4-го порядка, естественно, будет осью симметрии фигуры 2-го порядка (обычной осью симметрии фигуры на плоскости или в пространстве). Всякая прямая, проходящая через противоположные вершины куба, является его О. с. 3-го порядка ( $\varphi = 120^\circ$ ). Прямая, содержащая высоту правильной 6-угольной пирамиды, является О. с. 6-го порядка для этой пирамиды.

Прямой круговой конус, цилиндр и шар имеют О. с. бесконечного порядка.

**ОСЬ ЧИСЛОВАЯ** — см. *Числовая прямая, Числовая ось.*

**ОТКРЫТАЯ ОБЛАСТЬ** — срезное открытое множество. Подробнее см. *Область открытая.*

**ОТКРЫТОЕ МНОЖЕСТВО** в  $n$ -мерном пространстве — множество точек, содержащее вместе с каждой своей точкой некоторую окрестность этой точки. Справедливы такие утверждения об О. м.: объединение произвольной совокупности О. м. есть О. м.; пересечение конечного числа О. м. есть О. м.

Примеры. 1. Множество точек трехмерного пространства, координаты  $x, y, z$  которых удовлетворяют неравенству  $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ , есть О. м.

2. Множество точек четырехмерного пространства, координаты  $x_1, x_2, x_3, x_4$  которых удовлетворяют неравенству  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 1$ , есть О. м.

3. Интервал  $[a; b[$  есть О. м. на прямой, однако не является О. м. на плоскости. 4. Пустое множество считается О. м. (и замкнутым тоже).

См. также: *Замкнутое множество, Топология.*

Лит.: [4, 87, 94].

**ОТКРЫТЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД**  $n$ -мерного пространства — то же, что полинтервал.

См. также: *Параллелепипед*  $1^\circ$  в  $n$ -мерном пространстве.

**ОТКРЫТЫЙ ШАР:**  $1^\circ$ . О. ш. в  $n$ -мерном пространстве — множество точек  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  этого пространства, удовлетворяющих неравенству

$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta$ , где число  $\delta > 0$  называется радиусом О. ш., а фиксированная точка  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  называется центром О. ш. Символом  $\rho(M, M_0)$  обозначено расстояние между точками  $M$  и  $M_0$   $n$ -мерного пространства. На плоскости ( $n = 2$ ) О. ш. есть внутренность круга. В пространстве ( $n = 3$ ) О. ш. есть внутренность шара.

$2^\circ$ . О. ш. в метрическом пространстве — множество точек метрического пространства, отстоящих от некоторой фиксированной точки  $M_0$  (центра О. ш.) на расстоянии, меньшем числа  $\delta > 0$  ( $\delta$  называется радиусом О. ш.), т. е. множество точек, удовлетворяющих условию:  $\rho(M, M_0) < \delta$ .

**ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ** — см. *Погрешность.*

**ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА** — устаревший и вышедший из употребления термин, которым пользовались для названия *рациональных чисел*, когда отрицательные числа противопоставляли положительным.

**ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ МАКСИМУМ** — устаревшее название локального максимума. См. *Локальный экстремум.*

**ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ МИНИМУМ** — устаревшее название локального минимума. См. *Локальный экстремум.*

**ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ** — устаревшее название *Локального экстремума*.

Лит.: [87].

**ОТНОШЕНИЕ**: 1°. **О. двух чисел** — это частное от деления первого числа на второе. О. дробных чисел всегда можно заменить О. целых чисел, например:  $3/4 : 2/3 = 9/8 = 9 : 8$ .

2°. **О. двух однородных скалярных величин** — отношение их числовых значений (численных мер). Так, отношением двух отрезков называют О. их длин; отношением двух углов называют О. величин этих углов.

Можно также говорить об О. постоянных и переменных величин.

3°. **О. бинарное (или соответствие) между множествами  $A$  и  $B$**  — подмножество декартова произведения этих множеств, т. е. множества упорядоченных пар:  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ . Если множество  $A = B$ , то декартово произведение их равно  $A \times A = A^2$  (называется декартовым квадратом множества  $A$ ); тогда О. бинарное называется О. между элементами на множестве  $A$ . Если элементы  $a$  и  $b$  находятся в бинарном О.  $R$  на множестве  $A$ , то пишут  $aRb$  или  $(a, b) \in R$ .

О. бинарное  $R$  называется рефлексивным, если для всех  $a \in A$  выполняется  $(a, a) \in R$ ; О. бинарное  $R$  называется симметричным, если для любых  $a, b$   $aRb$  влечет  $bRa$ ; О. бинарное  $R$  называется транзитивным, если для любых  $a, b, c$  из  $aRb$  и  $bRc$  следует  $aRc$ .

О. бинарное  $R$  называется О. эквивалентности или эквивалентностью, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

См. также: *Величина, Тернарное отношение, Порядок*.

4°. **О. (или соответствие)  $n$ -арное на упорядоченной  $n$ -ке** множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  это всякое подмножество  $R$  декартова произведения  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ . При  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$  О.  $R$  на декартовой степени  $A^n$  называется  $n$ -арным О. на множестве  $A$ . Если  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$ , где  $a_i \in A_i$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ , то часто это обстоятельство записывают так  $R(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Так как О., заданные на фиксированном упорядоченном множестве  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , суть подмножества  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , то множество всех этих О. образует *булеву алгебру* относительно операций *объединения*, *пересечения* и *дополнения* О. При этом для произвольных элементов  $a_i \in A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и О.  $R_1$  и  $R_2$

$$\begin{aligned} (R_1 \cap R_2)(a_1, a_2, \dots, a_n) &\Leftrightarrow R_j(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ при } j = 1 \text{ и } j = 2, \\ (R_1 \cup R_2)(a_1, a_2, \dots, a_n) &\Leftrightarrow R_j(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ при } j = 1 \text{ или } j = 2, \\ \overline{R_1}(a_1, a_2, \dots, a_n) &\Leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) \notin R_1. \end{aligned}$$

Поэтому часто говорят вместо объединения, пересечения и дополнения О. об их конъюнкции, дизъюнкции и отрицании. На булевой алгебре О. можно естественным образом определить частичные операции произведения О. и обратимости О. Тогда говорят об алгебре О.

*Операции ( $n$ -арные)*, определенные на множестве  $A$ , можно рассматривать как  $(n + 1)$ -арные О. на  $A$ . Дальнейшее развитие понятия О. приводит к предикату, а также таким весьма общим для математики в целом понятиям, как *модель* и *алгебраическая система*.

Лит.: [45, 36].

**ОТОБРАЖЕНИЕ**  $f$  множества  $A$  «на» множество  $B$  — такое соответствие между элементами множеств  $A$  и  $B$ , при котором образ всего множества  $A$  совпадает с  $B$ , т. е.  $f(A) = B$ . О.  $f$  множества  $A$  на множество  $B$  называется также функцией с областью определения  $A$  и областью значений  $B$ . О. множества  $A$  на множество  $B$  называется также *сюръекцией*. Для общего случая, когда образ  $f(A) \subset B$ , говорят, что  $f$  есть отображение  $A$  «в»  $B$ . Если любые два различных элемента множества  $A$  отображаются также в различные два элемента множества  $B$ , то такое отображение  $A$  в  $B$  называется *инъекцией* или *инъективным отображением*. Отображение множества  $A$  в множество  $B$ , являющееся одновременно сюръекцией и инъекцией, называется *биекцией* (биективным отображением), т. е. биекция есть взаимно однозначное соответствие между элементами двух множеств, при котором каждому элементу одного множества отвечает один и только один элемент другого множества и, наоборот, каждому элементу второго множества отвечает один и только один элемент первого множества. Биекция — важный частный случай О.

О.  $f$  одного множества  $A$  в другое множество  $B$  называется иначе (что не точно) *функцией* с областью определения  $A$  и множеством значений  $f(A) \subset B$ .

О. из  $A$  в  $B$  записывают обычно так:  $A \xrightarrow{f} B$  или  $f: A \rightarrow B$ .

Точное определение таково:  $f: A \rightarrow B$  есть тройка  $(A, f, B)$ , где  $f$  — функциональное соответствие множеств  $A$  и  $B$ .

**Примеры** О. 1. Если  $A$  — множество треугольников,  $B$  — множество описанных вокруг каждого из них окружностей, то каждому треугольнику поставим в соответствие описанную вокруг него окружность, тогда получим О.  $A$  на  $B$ .

2. Если каждому слову русского языка поставим в соответствие его первую букву, получим О. множества слов в множество букв русского алфавита.

3. Если каждому натуральному числу  $n$  поставить в соответствие его квадрат  $n^2$ , то получим О. множества  $N$  на подмножество его квадратов.

См. также: *Обратное отображение, Отношение, Соответствие*.

**ОТРЕЗОК**; 1°. О. **прямой** — множество, состоящее из двух различных точек и всех точек, лежащих между ними. Обозначение О., соединяющего точки  $A$  и  $B$ , называемые концами О., такое:  $[A; B]$ . Когда в обозначении О. опускаются квадратные скобки, тогда пишут: «отрезок  $AB$ ». Всякая точка, лежащая между концами О., называется *внутренней* его точкой. *Расстояние* между концами О. называется *длиной* его; обозначение длины О.:  $|AB|$  (читается: «расстояние  $AB$ »).

2°. О. **числовой (координатной) прямой** — множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству  $a \leq x \leq b$ , где числа  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ) называются концами О. ч. п. Обозначение:  $[a; b]$ . О. ч. п. называют замкнутым числовым промежутком, а также сегментом (в некоторых книгах). Число  $b - a$  называется длиной О. ч. п.

См. также: *Интервал, Промежуток*.

**ОТРИЦАНИЕ** высказывания  $A$  — новое высказывание, которое истинно в том и только в том случае, когда  $A$  ложно, и ложно в том и только в том случае, когда  $A$  истинно. О. высказывания  $A$  обозначается через  $\neg A$  (или  $\bar{A}$ ). Таким образом, О. высказывания  $A$  определяется таблицей истинности:

А	$\neg A$
И	Л
Л	И

О. можно рассматривать как унарную операцию высказываний исчисления, сопоставляющую истинному высказыванию  $A$  ложное высказывание ( $\neg A$  (читается: «не  $A$ ») и наоборот. Логическая операция О. связана с операциями конъюнкции и дизъюнкции законами де Моргана (см. *Моргана законы*). В исчислении предикатов (см. *Предикатов исчисление*) при О. кванторов знак О. можно ввести под знак квантора, заменив квантор на двойственный:

$$\neg (\forall x) (M(x)) = (\exists x) (\neg M(x)).$$

Лит.: [59].

**ОТРИЦАТЕЛЬНО-ОПРЕДЕЛЕННАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА** — невырожденная *квадратичная форма* с действительными коэффициентами, нормальный вид которой состоит лишь из отрицательных квадратов. Квадратичная форма является О.-о. к. ф. тогда и только тогда, когда ее *ранг* и отрицательный индекс инерции равны числу входящих в нее неизвестных.

**ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА** — по определению разность  $0 - a$ , где  $a$  — положительное число, называется О. ч. и обозначается  $-a$ . При пополнении множества положительных чисел нулем и отрицательными числами сохраняются все законы сложения и умножения, а также многие свойства неравенств, при этом становится всегда выполнимой операция вычитания. Существует строгая алгебраическая конструкция построения целых (и в частности отрицательных) чисел из натуральных.

См. также: *Натуральное число, Целые числа, Рациональные числа, Действительные числа, Комплексные числа, Гиперкомплексные числа, Кватернионы.*

**ОШИБКА ОКРУГЛЕНИЯ** — выходящее из употребления название погрешности приближенного значения величины.

См. также: *Погрешность, Приближенное значение величины.*





***p*-АДИЧЕСКИЕ ЧИСЛА.** Пусть *p*—простое число, а  $M_p$ —множество, элементами которого являются представители из приведенной системы вычетов по модулю *p*, т. е.  $M_p = \{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$ .

Тогда формально составленное выражение вида

$$a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n + \dots, \text{ где } a_i \in M_p, \quad (*)$$

называется *целым p-а. ч.* Слово «формально» в предыдущем предложении не означает, что знак «+» в указанном выражении является знаком сложения элементов  $a_0, a_1p, a_2p^2, \dots$ , хотя при дальнейшем изучении целых *p-а. ч.* этот знак будет выражать операцию сложения; знак «+» между упомянутыми элементами используется для удобства обозначений.

Если  $a_0 = 1$ , все остальные «коэффициенты» равны нулю:  $a_1 = a_2 = \dots = 0$ , то целое *p-а. ч.* называется *p-адической единицей*. Если же  $a_0 = a_1 = \dots = 0$ , то целое *p-а. ч.* (\*) называется *p-адическим нулем*.

Два целых *p-а. ч.* считаются равными, если равны их «соответственные коэффициенты» при равных степенях *p*. Целые *p-а. ч.* можно рассматривать как «бесконечные числа» в *p*-ичной системе счисления (в системе счисления с основанием *p*). Операции сложения и умножения над целыми *p-а. ч.* производятся аналогично тому, как это делается над натуральными числами («столбиком»), однако не в десятичной, а в *p*-ичной системе счисления, при этом сложение и умножение в целых *p-а. ч.* практически никогда не заканчиваются, за исключением того случая, когда с некоторого индекса все числа  $a_i$  равны 0. Впрочем, действия над бесконечными десятичными дробями также, вообще говоря, не кончаются на каком-то шаге (на каком-то разряде).

Рассмотрим сумму двух *p-адических чисел A и B*, где

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots, \\ B &= b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots, \end{aligned}$$

тогда их сумма  $C = c_0 + c_1p + c_2p^2 + \dots$ , где  $c_0 = a_0 + b_0$ , а также определено рекуррентно для всякого  $i = 1, 2, \dots$   $c_i = a_i + b_i + d_i$  по модулю *p*, где

$$d_i = \begin{cases} 0, & \text{если } a_{i-1} + b_{i-1} + d_{i-1} < p, \\ 1, & \text{если } a_{i-1} + b_{i-1} + d_{i-1} \geq p. \end{cases}$$

Несколько сложнее определяется операция умножения целых  $p$ -а. ч. Множество целых  $p$ -а. ч. образует *кольцо*, точнее, область целостности.

$P$ -а. ч. (при ранее указанных условиях) называется формально составленное выражение вида

$$a_{-k}p^{-k} + \dots + a_{-1}p^{-1} + a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n + \dots, \quad (**)$$

где числа  $a_i$  («коэффициенты») при степенях основания  $p$  являются представителями приведенной системы вычетов по модулю  $p$ .

$P$ -а. ч.  $(**)$  уже образуют поле.

$P$ -а. ч. напоминают нам формальные степенные *Лорана Ряды*.  $P$ -а. ч. находят применение в теории чисел и алгебре.

Лит.: [36, 58]

**ПАЛЮЧКИ НЕПЕРА** — см. *Непера палочки*.

**ПАНТОГРАФ** — прибор для вычерчивания гомотетичных фигур. С помощью П. производят подобное копирование различных планов, карт, рисунков и других плоских фигур. П. имеет всевозможные конструкции, в которых по-разному учитываются соображения устойчивости и простоты устройства прибора. На рис. 41 П. состоит: а) из четырех равных по длине планок  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ , соединенных шарнирно болтиками и составляющих модель ромба; б) из подвижной планки  $KL$ , которую можно установить так, чтобы она была параллельна планке  $BC$  ( $AD$ ) и чтобы при заданном коэффициенте гомотетии  $k$  выполнялось соотношение  $|DC| : |LC| = |AC| : |C'C|$ , где вершина  $A$  принимается за центр гомотетии, число  $k = |DC| : |LC|$  — за коэффициент гомотетии; в) из четырех штифтов и карандаша: три штифта устанавливаются в вершинах  $A$ ,  $B$ ,  $D$ , а четвертый штифт с острием для обвода фигуры устанавливается в отверстие  $C'$  (при увеличении фигуры), а в отверстие  $C$  устанавливается карандаш; при уменьшении фигуры карандаш и штифт ( $C$  и  $C'$ ) меняются местами.

Если, например, дана фигура  $P'$  и требуется построить фигуру  $P$ , ей подобную, с коэффициентом подобия  $k = 2$ ,  $k = |MN| : |M'N'|$ , где точки  $M$  и  $N$  принадлежат фигуре  $P$ , а точки  $M'$  и  $N'$  — фигуре  $P'$ , тогда подвижную планку  $KL$  устанавливаем с учетом значения  $k$ , т. е. чтобы отношение длин отрезков  $DC$  и  $LC$  равнялось 2; следовательно, точка  $L$  должна совпасть с серединой отрезка  $DC$ . Штифт с острием для обвода фигуры устанавливаем на планке  $KL$  в точке  $C'$  так, чтобы имело место равенство

$$|KL| : |C'L| = |DC| : |LC| = 2.$$

П. может быть использован в школе на лабораторных занятиях при изучении гомотетии и подобия. Не следует смешивать П. с *планиметром*.

**ПАПИРУСЫ** — дошедшие до нас математические памятники Древнего Египта (конца Среднего Царства), которые датируются приблизительно XVIII—XVI вв. до н. э. К таким П. относится папирус Райнда (английского египтолога, занимавшегося изучением этого папируса), хранящийся в Британском музее

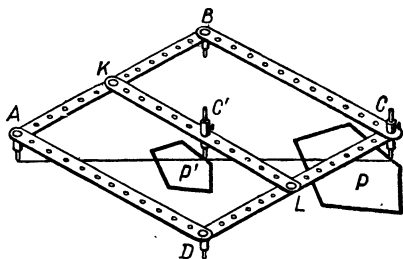


Рис. 41

(П. Райнда относится примерно к 2000 г. до н. э.), и Московский П., хранящийся в Государственном музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина. Расшифровка этого П. русскими египтологами академиками Тураевым Б. А. и Струве В. В. издана на немецком языке в 1930 г. академиком Струве. К той же эпохе (XXII династия) относятся Кахунские П., затем Берлинский «6619» с задачами на квадратные уравнения, и, наконец, из Византийской эпохи (VI—IX вв.) до нас дошел П. из Акима на греческом языке, хранящийся в Гизехе.

П. Райнда, расшифрованный профессором А. Эйзенлором в 1877 г., содержит богатый и интересный материал, решения задач с практическим содержанием. В папирусе Райнда их 85, в Московском папирусе таких задач — 25.

Из этих П. видно, что в Древнем Египте знали четыре действия с дробями, площади простейших геометрических фигур (прямоугольника, треугольника, трапеции), а также умели приближенно вычислять площадь круга; причем роль числа  $\pi$  играло число  $(16 : 9)^2 = 3,16...$ , а иногда просто число 3. В некоторых задачах вычисляются объемы прямоугольного параллелепипеда и цилиндра, используются пропорции. Часто по существу решаются уравнения с одной переменной (неизвестным).

Наибольший интерес представляют вычисление суммы геометрической прогрессии (задача 79 папируса Райнда), точная формула объема усеченной пирамиды с квадратным основанием (задача 14 Московского П.), вычисление боковой поверхности цилиндра (также содержится в Мсковском П.). Однако никаких рассуждений общего характера не проводится.

Система счисления, применявшаяся в Древнем Египте, была десятичной, но не имела нуля, следовательно, по существу не была позиционной. Сложение и вычитание производились обычным способом. При умножении один из сомножителей (множителей) представляли в виде суммы чисел 1, 2, 4, 8, 16, ..., умножение на которые производилось с помощью таблиц, после чего оставалось произвести сложение. Техника обращения с дробями, основанная на представлении всякой дроби в виде суммы дробей с единицей в числителе, также облегчалась применением таблиц. Так, дробь  $2/5$  представлялась в виде  $1/3 + 1/15$ . П. являются основным источником, позволяющим судить о математической культуре Древнего Египта. Тысячелетнее развитие математики египтян, как и вся египетская культура, оказало большое влияние на науку других стран, с которыми Древний Египет имел общение, особенно на греческую математику. Однако в египетской математической культуре содержалось много правил вычислений, но не доказывалось, почему именно такие правила следует применить, не содержалось общих рассуждений, доказательств.

Лит.: [15, 81].

**ПАРАБОЛ ФОРМУЛА** (Симпсона) — формула для приближенного вычисления определенных интегралов:

$$I = \int_a^b Y dx \approx \frac{h}{3} [Y_0 + Y_{2k} + 4(Y_1 + Y_3 + \dots + Y_{2k-1}) + 2(Y_2 + Y_4 + \dots + Y_{2k-2})] = S,$$

где промежуток интегрирования разбит на четное число  $2k$  равных частей длины  $h = (b - a) / 2k$  и для точек деления (узлов) значения подынтегральной функции равны:  $Y_i = Y(a + hi)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 2k$ . Погрешность, возникающая при применении П. ф., равна:  $S - I = \frac{(b-a)^5}{(2k)^4} \cdot |Y^{IV}(\xi)|$ , где  $\xi \in [a; b]$ . Суще-

ствуют и другие формулы для оценки погрешности.

Вывод П. ф. был сделан английским математиком Т. Симпсоном в 1743 г. Поэтому П. ф. называют его именем, хотя известна она была и ранее; например, ею пользовался шотландский математик Дж. Грегори (1668), о чем Симпсону не было известно.

Лит.: [87].

**ПАРАБОЛА** — множество точек плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки  $F$  (фокуса) и данной прямой  $l$  (директрисы), лежащих в той же плоскости. П. — кривая второго порядка. Графиком квадратного трехчлена  $y = ax^2 + bx + c$  является П. Простейшее (каноническое) уравнение П. в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:  $y^2 = 2px$ , где  $p = 2|FO|$  — расстояние от данной точки  $F$  до данной прямой  $l$  — директрисы П. (рис. 42, а, б). На рисунке 42, а взята произвольная точка  $M$ , принадлежащая П., следовательно, согласно определению, имеем:  $|MK| = |MF|$ .

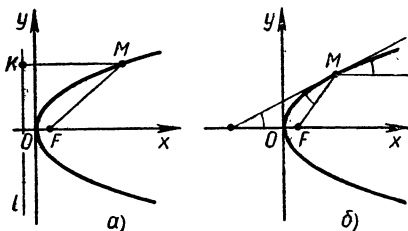


Рис. 42

Уравнение директрисы П. имеет вид:  $x = -\frac{p}{2}$ . Эксцентриситет П. равен единице ( $e = 1$ ). П. может быть получена как сечение конуса плоскостью, параллельной одной из образующих конуса (см. *Конические сечения*).

П. часто встречается на практике. Так, струйки воды фонтана описывают траектории в виде П.; камень, брошенный под углом к горизонту (если пренебречь сопротивлением воздуха), движется по П.; граница тени, отбрасываемой на стене лампочкой, помещенной в конический абажур, может иметь форму П, если образующая конического абажура параллельна плоскости стены.

Вращая П. вокруг ее оси  $Ox$ , получим поверхность 2-го порядка — *параболоид вращения*. Касательные к П. образуют равные углы (конгруэнтные углы) с осью П. и фокальным радиусом точки касания (рис. 42, б).

Отсюда следует, что луч света, параллельный оси параболоида, отразившись от его поверхности, пройдет через фокус, и, наоборот, луч, выходящий из фокуса, после отражения будет параллелен оси П. Это свойство часто используется в оптических и световых приборах и устройствах (прожектор, фары автомобиля и др.).

Следует иметь в виду, что все параболы на плоскости подобны, а П.  $y = ax^2$  и  $y = x^2$  даже гомотетичны, центр гомотетии совпадает с началом координат.

**ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ** — кривая, уравнение которой в полярных координатах имеет вид:  $r = a\sqrt{\varphi}$ , где  $a$  — константа, а  $(r, \varphi)$  — полярные координаты. На рисунке 43 ветвь П. с. проведена сплошной линией при  $a > 0$ , пунктирной линией при  $a < 0$ .

П. с. иначе называется спиралью Ферма.

См. также: *Спираль*.

**ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ТОЧКА** — точка на поверхности, в которой гауссова (или полная) кривизна равна нулю:  $K = k_1 \cdot k_2 = 0$ , где  $K$  — полная кривизна

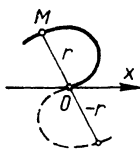


Рис. 43

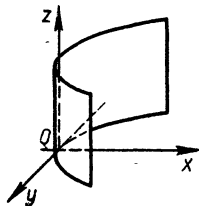


Рис. 44

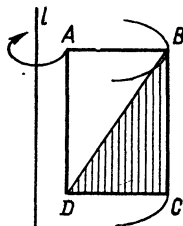


Рис. 45

поверхности, а  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны в той же точке поверхности.

**ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР** — одна из поверхностей 2-го порядка, простейшее уравнение которой в прямоугольных декартовых координатах имеет вид:  $y^2 = 2px$ . Направляющей П. ц. является парабола  $y^2 = 2px$ , где  $p$  — расстояние от фокуса до директрисы параболы, а образующей — прямая, параллельная оси  $Oz$  (рис. 44).

**ПАРАБОЛОИДЫ** — поверхности 2-го порядка, простейшие уравнения которых в прямоугольных декартовых координатах имеют вид:

$$1) \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 2z \text{ — эллиптический параболоид};$$

$$2) \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 2z \text{ — гиперболический параболоид}.$$

**ПАРАДОКС** в математике — верное утверждение (высказывание), но кажущееся на первый взгляд неверным в силу наших обычных и привычных психологических представлений.

**Примеры.** 1. Уравнение  $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$  имеет

три корня. Утверждение на первый взгляд кажется невероятным, парадоксальным. В самом деле, мы по существу имеем уравнение  $\log_a x = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ), функция (значения ее) равна своей обратной (значению обратной функции). Однако при  $a = 1/16$  это уравнение имеет три

корня. Читатель сам может это проверить, хотя это и не так легко.

2. Сумма условно сходящегося ряда изменяется от перестановки его членов (см. *Условная сходимость* бесконечного ряда).

3. Если лист (ленту) Мёбиуса разрезать ножницами по его «средней» линии, то он не распадется на две части.

4. При вращении (повороте) прямоугольника  $ABCD$  (рис. 45) вокруг оси  $l$ , лежащей в его плоскости и параллельной одной из его сторон ( $l \parallel AD$ ), объем тела, полученного от вращения треугольника  $BCD$ , больше объема тела, полученного от вращения треугольника  $ABD$ .

П. называют иногда и *софизмы*, а также неверные выводы, полученные на основании использования таких понятий и рассуждений, границы применимости которых неизвестны: например, при перенесении свойств конечных множеств на бесконечные множества можно получить неверные (парадоксальные) выводы; общеизвестен также П. геометрической вероятности, парадокс, принадлежащий Ж. Бертранию (1907) и состоящий в том, чтобы найти вероятность того, что длина «случайной хорды» окружности единичного радиуса превзойдет  $\sqrt{3}$ , т. е. длину стороны равностороннего треугольника (три решения этой задачи дают три различных ответа).

**ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД:** 1°. П. в  $n$ -мерном пространстве — множество точек  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$ -мерного пространства, удовлетворяющих неравенствам:  $a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n$ , где  $a_i < b_i$  — действительные числа. Точка  $P((b_1 + a_1)/2, \dots, (b_n + a_n)/2)$  называется центром П. В случае выполнения строгих неравенств  $a_i < x_i < b_i$  множество точек называется открытым параллелепипедом или полиинтервалом. П. называют также замкнутым, чтобы подчеркнуть его отличие от открытого П. Точки П., не являющиеся точками соответствующего открытого П., образуют совокупность граней П. Отдельная грань П. определяется неравенствами:

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_{i-1} \leq x_{i-1} \leq b_{i-1}, a_{i+1} \leq x_{i+1} \leq b_{i+1}, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n$$

и равенством  $x_i = a_i$  (или  $x_i = b_i$ ). П. имеет  $2n$  граней, так как индекс  $i$  может меняться от 1 до  $n$ . В пространстве ( $n = 3$ ) П. совпадает с обычным прямоугольным параллелепипедом. На плоскости ( $n = 2$ ) П. превращается в прямоугольник; грани в этом случае превращаются в стороны прямоугольника.

2°. П. (в школьном курсе элементарной геометрии) — *призма*, основанием которой является параллелограмм. Если боковые ребра (или грани) П. перпендикулярны плоскости основания, то П. называется *прямым*. Если боковые ребра (или грани) П. не перпендикулярны плоскости основания, то такой П. называется *наклонным*. Если основание прямого П. — прямоугольник, то такой П. называется *прямоугольным*. У прямоугольного П. все грани — прямоугольники. Длины трех ребер прямоугольного П., имеющих общую вершину, называются его *измерениями* (в некоторых книгах — *линейными размерами*). Квадрат длины диагонали прямоугольного П. равен сумме квадратов трех его измерений. Всякий П. имеет центр симметрии — точку пересечения его диагоналей. Диагонали прямоугольного П. конгруэнтны. Прямоугольный П. с равными измерениями называется *кубом*.

У куба все грани — конгруэнтные квадраты. Симметричность куба богаче, чем симметричность прямоугольного П. или наклонного П., он имеет оси симметрии не только 2-го порядка (обычные оси симметрии), но и оси симметрии 3-го и 4-го порядка. Площадь боковой поверхности П. вычисляется по формуле

$$S = p \cdot h,$$

где  $p$  — периметр перпендикулярного сечения, а  $h$  — длина бокового ребра П. Объем П. равен:

$$V = QH,$$

где  $Q$  — площадь основания, а  $H$  — высота П. (расстояние между основаниями). Наклонный П. является пространственным аналогом *параллелограмма*, не являющегося прямоугольником.

Наклонный П., у которого все грани — конгруэнтные ромбы, называется *ромбоэдром*. П. является выпуклым многогранником (выпуклой фигурой).

См. также: *Параллелепипед в  $n$ -мерном пространстве*, *Параллелограмм*, *Параллелепидры*.

**ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАЛЬНАЯ ОКРЕСТНОСТЬ** точки — открытый  $n$ -мерный параллелепипед, или полиинтервал с центром в данной точке.

**ПАРАЛЛЕЛОГРАММ** — четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, т. е. четырехугольник, у которого одна пара про-

тивоположных сторон параллельна и другая пара также параллельна.  $P$ . есть пересечение двух *полос*, края каждой из которых не параллельны краям другой полосы.

Противоположные стороны  $P$ . конгруэнтны; противоположные углы его также конгруэнтны. Углы, прилежащие к любой стороне  $P$ ., по своей величине в сумме составляют  $180^\circ$ . Каждая из диагоналей  $P$ . делит его на два конгруэнтных треугольника. Точка пересечения диагоналей  $P$ . есть центр его симметрии, а следовательно, эта точка является серединой каждой диагонали  $P$ . Конгруэнтность и параллельность одной пары противоположных сторон четырехугольника является *необходимым и достаточным условием* (признаком) для того, чтобы этот четырехугольник был  $P$ . Наличие у четырехугольника центра симметрии является необходимым и достаточным условием для того, чтобы этот четырехугольник был  $P$ . Существует много других необходимых или необходимых и достаточных условий для того, чтобы некоторый четырехугольник был  $P$ . Расстояние между прямыми, на которых лежат противоположные стороны  $P$ ., называется высотой  $P$ .

Высотой  $P$ . можно также назвать и отрезок перпендикуляра, проведенного из любой точки какой-либо стороны  $P$ . к противоположной стороне или ее продолжению (или длину этого перпендикуляра; но такое определение высоты  $P$ . несколько громоздко). У  $P$ . имеются две высоты, вообще говоря, различные.  $P$ ., у которого один угол прямой (отсюда следует, что и все углы прямые), называется *прямоугольником*.

У прямоугольника диагонали конгруэнтны.  $P$ ., у которого две смежные стороны конгруэнтны (отсюда следует, что все стороны конгруэнтны), называется *ромбом*. Ромб, у которого один угол прямой (отсюда следует, что все углы прямые), называется *квадратом*.

Площадь  $P$ . равна:  $S = ah$ ,  $S = ab \sin \hat{A}$ ,  $S = 0,5 d_1 d_2 \sin \alpha$ , где  $a$  — основание,  $h$  — высота,  $b$  — боковая сторона,  $d_1, d_2$  — диагонали,  $\alpha$  — величина угла между диагоналями.

**ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ** — см. *Проекция*.

**ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ** — отношение эквивалентности на множестве прямых на плоскости (или на множестве плоскостей в трехмерном пространстве).

$P$ . понимают как *бинарное* (двуместное) отношение между прямыми (плоскостями), выражающее свойство «быть параллельными».

См. также: *Параллельные прямые, Параллельные плоскости*.

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ**. 1°.  $P$ . п. в геометрии Евклида — прямые, принадлежащие одной плоскости, если они не имеют общих точек или совпадают. Если прямая  $a$  параллельна прямой  $b$ , то отношение параллельности записывают так:  $a \parallel b$ , где вертикальные черточки означают знак параллельности прямых. Согласно определению  $P$ . п. получаем, что всякая прямая  $a$  сама себе параллельна:  $a \parallel a$  (свойство *рефлексивности*). Если прямая  $a$  параллельна прямой  $b$ , то прямая  $b$  параллельна прямой  $a$  (свойство взаимности, *симметричности* отношения параллельности прямых). Если  $a \parallel b$ ,  $b \parallel c$ , то отсюда следует, что  $a \parallel c$  (свойство *транзитивности* отношения параллельности прямых). Через данную точку проходит не более одной прямой, параллельной данной прямой (аксиома параллельных). Всякая прямая  $a'$ , симметричная данной прямой  $a$  относительно лю-

бой точки, параллельна данной прямой; другими словами, центрально симметричные друг другу прямые параллельны. Существует несколько признаков параллельности прямых. Например, если две прямые, принадлежащие одной плоскости  $\alpha$ , перпендикулярны одной и той же прямой, лежащей в той же плоскости, то они параллельны; если при пересечении прямых  $a$  и  $b$ , принадлежащих одной плоскости, третьей прямой  $c$ , лежащей в той же плоскости, соответственные (или накрест лежащие) углы конгруэнтны, то прямые  $a$  и  $b$  параллельны, и другие признаки.

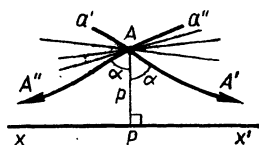


Рис. 46

Аналогично дается определение параллельных плоскостей в геометрии Евклида. Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек или совпадают. Следовательно, всякая плоскость  $\alpha$  параллельна сама себе:  $\alpha \parallel \alpha$ . Признаки параллельности двух плоскостей во многом аналогичны признакам параллельности двух прямых на плоскости. В частности, если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

2°. **Параллельные прямые в геометрии Лобачевского.** Пусть в плоскости даны прямая  $a$  и точка  $A$  вне ее (рис. 46). Тогда в плоскости через точку  $A$  можно провести более одной прямой, не пересекающей прямую  $a$  ( $XX'$ ) (аксиома Лобачевского). Отсюда (из аксиомы Лобачевского) следует, что таких прямых, проходящих через точку  $A$  и не пересекающих прямую  $a$ , в плоскости, определяемой этой прямой  $a$  и точкой  $A$ , существует бесконечное множество (это будут прямые, проходящие через точку  $A$ , и внутренние точки соответствующих вертикальных углов). Плоскость, в которой выполняются аксиомы Лобачевского, называется плоскостью Лобачевского. Пусть  $|AP| = p$  — длина перпендикуляра, проведенного из точки  $A$  на прямую  $a$ ; длина этого перпендикуляра называется стрелкой угла параллельности. Прямые пучка с центром в точке  $A$  разбиваются на два класса: класс прямых, пересекающих прямую  $a$ , и класс прямых, не пересекающих прямую  $a$ . Существует граничная прямая, отделяющая множество прямых пучка, пересекающих прямую  $a$ , от множества прямых пучка, не пересекающих прямую  $a$ .

Доказывается, что таких граничных прямых две:  $a'$  и  $a''$ , которые и называются прямыми, параллельными прямой  $a$ ; при этом прямая  $a'$  (или прямая  $AA'$ ) называется прямой, параллельной прямой  $a$  в направлении  $XX'$  или в направлении  $AA'$ ; прямая  $a''$  (или прямая  $AA''$ ) называется прямой, параллельной прямой  $a$  в направлении  $X'H$ , где точка  $X'$  расположена правее точки  $P \in a$ , точка  $X$  — левее точки  $P$ , точки  $X$  и  $X'$  принадлежат прямой  $a$ . Доказывается, что угол  $PA A'$  (и конгруэнтный ему угол  $PA A''$ ) острый, т. е. величина его  $\alpha$  удовлетворяет неравенству  $0 < \alpha < \pi/2$ . Острый угол  $PA A'$  (см. рис. 46) называется углом параллельности в точке  $A$  по отношению к прямой  $a$ . Угол параллельности зависит от стрелки параллельности (длины перпендикуляра  $p$ ), т. е. от расстояния от точки  $A$  до прямой  $a$ , другими словами, угол параллельности  $\alpha$  есть функция стрелки  $p$ . Следуя обозначениям Лобачевского, запишем эту функцию:  $\alpha = \pi(p)$  или, положив  $p = x$ , получим:  $\alpha = \pi(x)$ . Доказывается, что функция  $\pi(x)$  является монотонно убывающей функцией, т. е. с возрастанием аргумента — стрелки  $p$  — от нуля до бесконечности значение функции  $\pi(p)$ , равное величине угла параллельности, убывает от  $\pi/2$  до 0. Это свойство функции



Лобачевского символически можно записать так:  $\pi(p) \rightarrow \pi/2$  при  $p \rightarrow 0$  и  $\pi(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ . Следовательно, в малых частях пространства (при  $p \rightarrow 0$ )  $\pi(p) \rightarrow \pi/2$  геометрия Лобачевского мало отличается от геометрии Евклида.

П. п. в геометрии Лобачевского имеют свойства, совсем не похожие на свойства П. п. в геометрии Евклида. Так, расстояние от точек одной из параллельных прямых до второй прямой в направлении параллельности все время убывает. Доказывается, что если прямая  $a'$  параллельна в точке  $A$  прямой  $a$  в направлении  $XX'$ , то прямая  $a'$  (или  $AA'$ ) будет параллельна прямой  $a$  в том же направлении в любой другой ее точке. Прямые, проходящие через точку  $A$ , не пересекающие и не параллельные прямой  $a$  (на рисунке 46 это тонкие прямые), называются *сверхпараллельными* и по отношению к прямой  $a$ . Сверхпараллельные прямые также называются *расходящимися* (в некоторых книгах *ультрапараллельными*). Пожалуй, наиболее удачное название таких прямых — «расходящиеся прямые» в силу свойств этих прямых. Расходящиеся прямые в геометрии Лобачевского имеют общий перпендикуляр, по обе стороны от которого расстояния от точки одной из расходящихся прямых до другой все время возрастают при удалении этой точки от общего перпендикуляра. Таким образом, П. п. в геометрии Лобачевского определяются значительно сложнее по сравнению с П. п. в геометрии Евклида и имеют в отличие от них особые свойства. Аксиому Лобачевского иногда в некоторых книгах называют аксиомой Лобачевского — Бойан, по имени венгерского математика Яноша Бойан, пришедшего к той же *неевклидовой геометрии*, что и Н. И. Лобачевский.

Лит.: [33, 62].

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС.** 1°. П. п. в евклидовой геометрии — отображение плоскости (пространства) на себя, при котором все точки плоскости (пространства) смещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. П. п. в евклидовой геометрии иначе называется переносом или *вектором* (*свободным вектором*).

См. также: *Связанный вектор*, *Скользкий вектор*, *Векторное пространство*, *Вектор-функция*, *Собственный вектор*.

2°. П. п. в *аффинной геометрии* — отображение плоскости (пространства) на себя, при котором все точки перемещаются на один и тот же вектор.

3°. П. п. в *пространстве аффинной связности* — линейное преобразование касательного пространства к одной точке в касательное пространство к другой точке, зависящее от кривой, соединяющей эти две точки. Уравнения П. п. в п. а. с. есть обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка, определяемые *символами Кристоффеля*.

Лит.: [72].

**ПАРАМЕТР** — вспомогательная переменная, входящая в формулы и выражения. Обычно П. представляет собой скалярную величину или действительное число; П. обозначается буквой какого-либо алфавита. Часто П. рассматривают и как постоянные числа в условиях данной задачи, но в другой задаче они рассматриваются как переменные.

**П р и м е р ы.** 1. В квадратном уравнении  $ax^2 + bx + c = 0$  коэффициенты  $a, b, c$  являются П.,  $x$  — переменная. При решении уравнения коэффициенты  $a, b, c$  считаются постоянными числами, но вообще они также могут быть приняты за переменные.

2. Уравнение  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$  в прямоугольной декартовой системе координат представляет собой уравнение множества *окружностей* единичного радиуса; числа  $a$  и  $b$  — параметры окружности в рассматриваемом множестве; если положить  $a = 1$ ,  $b = 3$ , то мы получим вполне определенную окружность с центром в точке  $(1; 3)$  единичного радиуса из множества окружностей того же радиуса.

3.  $x - a = \alpha t$ ,  $y - b = \beta t$ ,  $z - c = \gamma t$  — уравнения прямой в пространстве; прямая проходит через точку  $(a, b, c)$  и параллельна вектору с координатами  $\alpha, \beta, \gamma$ . В этих уравнениях прямой в пространстве буква  $t$  есть П. Числовое значение П. может выражать значение величины угла (как, например, в параметрическом уравнении окружности), длину дуги кривой и другие скалярные величины.

Греч. *параметров* — отмеривающий.

См. также: *Параметрическое представление функций*, *Параметрические уравнения*, *Угловой коэффициент прямой*.

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ** кривой на плоскости. Пусть  $F(x, y) = 0$  — (неявное) уравнение кривой  $L$  на плоскости. Уравнение задает (возможно, многозначную) функцию  $y = y(x)$ . Пусть  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  — *параметрическое представление* этой функции. Уравнения  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  называются П. у. кривой.

Если функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  можно выбрать рациональными, то кривая  $L$  называется *универсальной*.

Примеры. 1. П. у. эллипса  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  являются, например, уравнения:  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ .

2. П. у. гиперболы  $x^2 - y^2 = 1$  являются, например, уравнения:  $x = \frac{1+t^2}{2t}$ ,  $y = \frac{1-t^2}{2t}$ ,  $t \neq 0$ .

Для того чтобы по П. у. линии написать соотношение, связывающее координаты  $x$ ,  $y$  точек кривой, следует из системы уравнений  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  исключить параметр  $t$ .

Лит.: [3, 6].

**ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ функций.** Пусть заданы две функции  $y = y(t)$ ,  $x = x(t)$  одного переменного. Такое задание определяет отношение  $F$  между игреками и иксами: пара чисел  $(x_0, y_0)$  находится в отношении  $F$ , если для некоторого  $t_0$  имеет место  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ . Отношение  $F$  имеет график (см. *График отношения*) — кривую в плоскости  $xOy$ .

В случае, когда функция  $x = x(t)$  обратима (т. е. отображение  $t \rightarrow x(t)$  взаимно-однозначно отображает область определения функции  $x(t)$  на множество значений функции  $x(t)$ , пара функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  задает функцию  $y = F(x)$ , определенную формулой  $F(x) = y[t(x)]$ , где  $t = t(x)$  — функция, обратная  $x = x(t)$ .

В случае, когда  $x = x(t)$  — необратимая функция, можно рассмотреть обратное соответствие  $t = t(x)$ , что является многозначной функцией, и далее  $y = F(x) = y[t(x)]$ . Последнее определяет многозначную функцию  $y = F(x)$ .

Часто удобно заданную (многозначную) функцию  $y = F(x)$  толковать в

указанном выше смысле, подобрав однозначные функции  $y = y(t)$ ,  $x = x(t)$  так, чтобы  $y = F(x) = y[t(x)]$ . Тогда говорят, что задано П. п. функции  $F(x)$ .

Иногда параметр  $t$  имеет простой геометрический смысл. Например, функции  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$  определяют (многозначную) функцию  $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ , графиком которой является окружность радиуса  $R$  с центром в начале координат  $O(0, 0)$ , параметр  $t$  является углом между положительным направлением оси  $x$  и вектором  $\vec{OP}$ , где  $P$  — текущая точка кривой (соответствующая параметру  $t$ ).

П. п. имеет особенное значение в случае неявного задания функции  $y = y(x)$  уравнением  $F(x, y) = 0$ . В этом случае явное выражение истрека через  $x$  бывает и невозможным.

Таким образом, преимущества П. п. функции заключаются в том, что: а) исследование неоднозначных функций в известной мере сводится к исследованию однозначных функций; б) исследование неявных функций сводится в известной мере к исследованию явных функций.

В векторном анализе широко используется П. п. векторной функции, задающей кривую в пространстве  $\vec{M} = \vec{M}(t)$ ; при этом в качестве параметра особенно удобна длина дуги, отсчитанной от некоторой точки кривой.

Подобно этому, в дифференциальной геометрии уравнение поверхности в трехмерном евклидовом пространстве задается параметрически  $\vec{M} = \vec{M}(u, v)$  — такой способ задания является более общим, чем, например, описание поверхности уравнением  $z = \psi(x, y)$ .

Отметим в заключение формулы, позволяющие вычислить первую и вторую производные от функций, заданных параметрически:  $y = \varphi(t)$ ,  $x = \psi(t)$ ;  
 $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$ ,  $x = \psi(t)$ ;  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi''\psi' - \varphi'\psi''}{(\psi')^3}$ ,  $x = \psi(t)$ .

Лит.: [71].

**ПАРСЕВАЛЯ РАВЕНСТВО** — равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad (*)$$

справедливое для любой интегрируемой в квадрате функции  $f(x)$ ; здесь  $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \dots$  — коэффициенты Фурье функции  $f(x)$  по ортогональной системе функций,  $\cos nx, \sin mx; n, m = 1, 2, \dots$ . П. р. является обобщением *теоремы Пифагора*. П. р. имеет место и для ортогональных систем, отличных от тригонометрической системы. Именно для всякой полной ортонормированной системы функций  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots)$  справедливо

$$(f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

где  $(f, f)$  — скалярное произведение, относительно которого система  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  ортонормирована,  $a_n$  —  $n$ -й коэффициент Фурье функции  $f$  по системе  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots)$ .

Название П. р. связано с именем французского математика М. Парсеваля, установившего в 1805 г. формулу (\*) (в предположении о возможности почленного интегрирования тригонометрического ряда Фурье функции  $f(x)$ ).

Лит.: [87].

**ПАСКАЛЯ ТЕОРЕМА** в проективной геометрии — **теорема**: во всяком шестивершиннике, вписанном в ряд точек 2-го порядка (кривую 2-го порядка, коническое сечение), три точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой — прямой Паскаля. П. т. является одной из основных теорем проективной геометрии. Содержание П. т. хорошо иллюстрируется на рисунке 47: если 6 вершин, взятых произвольно на кривой 2-го порядка, занумеровать цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 в порядке, указанном на рисунке, то пары сторон 12 и 45; 23 и 56; 34 и 61 будут противоположными и три точки пересечения их  $K$ ,  $L$  и  $M$  будут лежать на одной прямой  $x$  — прямой Паскаля.

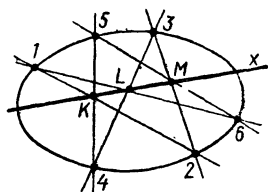


Рис. 47

Из 6 точек — вершин шестивершинника, лежащих на кривой 2-го порядка, можно получить 60 различных шестивершинников, если соединять данные точки в различном порядке, откуда следует, что для данных 6 точек кривой 2-го порядка можно получить соответственно 60 различных прямых Паскаля.

П. т. названа в честь французского математика Б. Паскаля (1623—1662), доказавшего ее в 1639 г., когда Блезу Паскалю было шестнадцать лет. Опубликована П. т. была в 1641 г. П. т. оказала большое влияние на Дезарга. Частный случай П. т. для кривой 2-го порядка, распадающейся на пару пересекающихся прямых, был известен еще в древности (теорема Паппа, IV в. н. э.).

П. т. о вписанном в кривую 2-го порядка шестиугольнике, как и *Дезарга теорема*, часто используется для геометрических построений: с помощью П. т. можно строить точки кривой 2-го порядка, если заданы 5 ее точек или 4 точки кривой и касательная к кривой в одной из них, пользуясь при этом только одной линейкой (односторонней математической линейкой); можно строить касательные к кривой в данной ее точке, если кривая начерчена или задана пятью точками, пользуясь опять-таки лишь одной линейкой. В частности, можно построить касательную к начерченной окружности с помощью только одной линейки (см.: Поляра точки относительно кривой 2-го порядка).

П. т. двойственна *Брианшона теореме*.

См. также: *Двойственности принцип*, *Полный четырехвершинник*.

**ПАСКАЛЯ ТРЕУГОЛЬНИК** — треугольная таблица чисел, являющихся биномиальными коэффициентами:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
 C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

В числовом виде П. т. выглядит так:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
 \end{array}$$

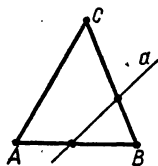


Рис. 48

В силу свойства биномиальных коэффициентов

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

каждое число П. т. равно сумме двух чисел, над ним стоящих (при этом считается, что на периферии П. т. стоят нули). П. т. приведен в сочинении Паскаля (1665) «Трактат об арифметическом треугольнике», отсюда П. т. называют также иногда арифметическим треугольником. П. т. был известен и другим ученым до Паскаля, например Стифелю в 1544 г. Поэтому в раз-

ных странах его называют по-разному: в Германии его чаще называют треугольником Стифеля, в Италии — треугольником Тарталья, у нас следовало бы его назвать треугольником Омара Хайяма, в честь таджикского поэта, философа и математика, у которого встречается этот треугольник. В Индии поэт Пинтала (II. в. до н. э.) пользовался П. т. при решении вопросов поэзии.

Лит.: [18].

**ПАША АКСИОМА** в геометрии Евклида — предложение: если прямая  $a$ , лежащая в плоскости треугольника  $ABC$  и не проходящая ни через одну из вершин, проходит через точку отрезка (стороны)  $AB$ , то эта прямая проходит либо через точку отрезка  $AC$ , либо через точку отрезка  $BC$ . Другими словами, П. а. можно кратко сформулировать так: если прямая, лежащая в плоскости треугольника, пересекает одну из сторон треугольника, то она пересекает и другую его сторону (рис. 48).

П. а. является одной из важнейших аксиом при аксиоматическом (дедуктивном, строго логическом) построении курса элементарной геометрии Евклида, в частности планиметрии.

П. а. часто используется при доказательстве ряда теорем при изложении геометрии по схеме Гильберта.

П. а. названа в честь немецкого математика Паша, одного из первых математиков, положивших начало исследованию аксиоматического обоснования геометрии.

См. также: *Основания геометрии, Архимеда аксиома, Кантора аксиома.*

**ПЕАНО АКСИОМЫ** натуральных чисел предложены в 1891 г. итальянским математиком и логиком Дж. Пеано. Они служат для определения понятия натурального числа. Натуральными числами называются элементы всякого непустого множества  $N$ , в котором существует отношение «следует за» (число, следующее за  $a$ , будем обозначать через  $a^*$ ), удовлетворяющее следующим аксиомам: 1. Существует число 1, не следующее ни за каким числом. 2. Для любого числа  $a$  существует следующее за ним число  $a^*$ , и притом только одно, т. е. из  $a = b$  вытекает  $a^* = b^*$ . 3. Любое число следует не более чем за одним числом, т. е. равенство  $a^* = b^*$  влечет  $a = b$ . 4. (Аксиома индукции.) Пусть любое множество  $M$  натуральных чисел обладает свойствами: 1) единица принадлежит  $M$ ; 2) если число  $a$  принадлежит  $M$ , то  $a^* = a + 1$  также принадлежит  $M$ . Тогда  $M$  содержит все натуральные числа, т. е. множество натуральных чисел совпадает с  $M$ .

Лит.: [95].

**ПЕАНО КРИВАЯ** — непрерывная кривая в смысле Жордана, проходящая

через все точки некоторого квадрата. Рассмотрена впервые итальянским математиком Дж. Пеано в 1890 г.

**ПЕЛЛЯ УРАВНЕНИЕ** — уравнение вида  $x^2 - Dy^2 = 1$ , где  $D$  — натуральное число, не являющееся квадратом другого натурального числа. П. у. легко решается в целых числах. Это уравнение названо П. у. Л. Эйлером, который по ошибке принял переводчика одной книги по теории чисел за автора этой книги.

См. также: *Диофантовы уравнения*.

**ПЕНТАГОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА** — натуральные числа вида  $(3n^2 - n) : 2$ , т. е. числа 1, 5, 12, 22, ... П. ч. являются частным случаем *фигурных чисел* и составляют *арифметический ряд* 2-го порядка. Название П. ч. происходит от того, что ими выражается число шаров, выложенных на плоскости в виде последовательно наращенных пятиугольников. П. ч. — пятиугольные числа. Греч. *πεντα* — пятиугольник.

**ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ** данной функции  $f$  — такая функция  $F$ , *производная* от которой равна данной (на заданном промежутке), т. е.  $F' = f$ . Отыскание П. ф. является действием, обратным *дифференцированию*. Оно не однозначно: для функции  $f$  существует бесконечно много П. ф.; однако отличаются они друг от друга лишь постоянным слагаемым. Совокупность всех П. ф. для  $f$  называется *неопределенным интегралом* от  $f$ .

Для всякой непрерывной функции  $f$  существует П. ф.

Пример. Для  $1/x$  при любой постоянной  $C$  функция  $\ln |x| + C$  будет П. ф. на любом промежутке, не содержащем точку 0.

**ПЕРВООБРАЗНЫЙ КОРЕНЬ** по модулю  $m$  — такое число  $g$ , что наименьшее положительное число  $k$ , для которого разность  $g^k - 1$  делится на  $m$  ( $g^k$  сравнимо с 1 по модулю  $m$ ), совпадает с  $\varphi(m)$ , где  $\varphi(m)$  — *Эйлера функция*, равная числу натуральных чисел, меньших  $m$  и взаимно простых с  $m$ .

Например, П. к. по модулю 7 является число 3, так как  $\varphi(7) = 6$ , а числа:  $3^1 - 1 = 2$ ,  $3^2 - 1 = 8$ ,  $3^3 - 1 = 26$ ,  $3^4 - 1 = 80$ ,  $3^5 - 1 = 242$  не делятся на 7 и лишь число  $3^6 - 1 = 728$  делится на 7. П. к. существует, когда  $m = 2$ ,  $m = 4$ ,  $m = p^\alpha$ ,  $m = 2p^\alpha$ , где  $p$  — простое нечетное число,  $\alpha$  — целое  $\geq 1$ . Число П. к. в этих случаях равно  $\varphi(\varphi(m))$  (числа, разность которых кратна  $m$ , не считаются различными); для других модулей их нет. Советский математик академик И. М. Виноградов установил в 1926 г., что в интервале  $[1, 2^{2k} \sqrt{p} \ln p]$  найдется П. к. по модулю  $p$ , где  $p$  — простое нечетное число,  $k$  — число различных простых делителей числа  $p - 1$ .

Лит.: [13].

**ПЕРВУШИНА ЧИСЛО**. В 1883 г. талантливый уральский математик-самочка прислал в Петербургскую Академию наук заметку: «Число  $2^{31} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$  есть простое». В науке это число принято называть *первущинским*.

**ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ** — предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Пользу-

ясь П. з. п., можно, например, найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ , равный  $3/2$ .

См. также: *Замечательные пределы, Предел последовательности, Предел функции.*

**ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ** системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

функция вида:

$$F(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

обращающееся в константу при подстановке любого решения системы:  $y_1 = y_1(x)$ ,  $y_2 = y_2(x)$ , ...,  $y_n = y_n(x)$ , причем функция  $F$  не тождественно равна константе. П. и. есть уравнение *гиперповерхностей* в пространстве переменных  $x, y_1, y_2, \dots, y_n$  таких, что каждая гиперповерхность содержит некоторое подсемейство интегральных кривых. Например, система

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)z, \quad \frac{dz}{dx} = b(x)y + a(x)z$$

имеет П. и.:

$$\ln |y + z| - \int [a(x) + b(x)] dx.$$

**ПЕРЕГИБА ТОЧКА** плоской кривой—точка  $M$  такая, что кривая в некоторой окрестности этой точки лежит по разные стороны от касательной в точке  $M$ . Для кривых  $y = f(x)$ , где  $f(x)$  достаточное число раз дифференцируема, первая отличная от нуля производная в П. т. имеет нечетный порядок. *Кривизна кривой* в П. т. равна нулю. Например, для кривых  $y = x^{2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , начало координат есть П. т.

**ПЕРЕМЕННАЯ ВЕЛИЧИНА** — величина, которая принимает различные значения. Например, при сжатии идеального газа давление и объем газа изменяются. Введение П. в. в математику в XVII в. является революционным скачком в развитии науки вообще. Оно означало новую ступень познания явлений природы в их взаимной связи и движении. Мощные математические методы и удобный аппарат дифференциального и интегрального исчисления, основанные трудами Декарта, Ньютона, Лейбница, подверглись значительному изменению, а главное, строго научному обоснованию в XIX в. В это время была создана теория пределов, а вслед за ней теория непрерывных функций. Для современной математики прежнее определение П. в. не является удовлетворительным. Основания современной математики проникнуты идеями *множеств-теории* и *топологии*. В частности, под величинами понимают не только число, но и элементы произвольной природы некоторого множества. Старое понятие П. в. остается удобным для многих инженерных задач, а также в преподавании общего курса математики.

**ПЕРЕМЕСТИТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН** — см. *Коммутативность*.

**ПЕРЕМЕЩЕНИЕ**: 1°. П. плоскости — отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние (от точки до точки), т. е. *изометрия*. Говорят также и так: П. плоскости — отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние между двумя точками.

2°. П. пространства — отображение пространства на себя, сохраняющее расстояние между двумя точками, т. е. *изометрия*.

П. плоскости (пространства) называют также преобразованием перемещения

плоскости (пространства). П. плоскости (пространства) называют движением плоскости (пространства).

**Примеры** П. плоскости: *Осевая симметрия*, *Поворот* и частный случай поворота — *центральная симметрия*, *Параллельный перенос*, *скользящая симметрия* (косая симметрия). Одни П. плоскости меняют ориентацию фигуры, расположенной на плоскости (как осевая симметрия), другие не меняют ее.



Рис. 49

Всякое П. плоскости или пространства отображает любую фигуру, принадлежащую плоскости (пространству), на конгруэнтную фигуру.

Произведение (композиция) двух П. есть снова П.

**ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ.** П. м.  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству  $A$ , так и множеству  $B$ , т. е. оно состоит из всех общих для множеств  $A$  и  $B$  элементов. П. м.  $A$  и  $B$  обозначается символом  $A \cap B$  (или  $AB$ ) и называется также произведением множеств  $A$  и  $B$ . (Этот термин устарел.) П. м.  $A$  и  $B$  схематически изображено на рисунке 49 дважды заштрихованной областью.

Аналогично, если даны множества  $A_\alpha$ , где  $\alpha$  пробегает конечное или бесконечное множество индексов  $\mathfrak{M}$ , то П. м.  $A_\alpha$  ( $\alpha \in \mathfrak{M}$ ) называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат всем  $A_\alpha$ , т. е. каждому  $A_\alpha$  при любом  $\alpha \in \mathfrak{M}$ . П. м.  $A_\alpha$  ( $\alpha \in \mathfrak{M}$ ) обозначается символом  $\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{M}} A_\alpha$  (или  $\Pi_{\alpha \in \mathfrak{M}} A_\alpha$ ), а в случае, когда множество  $\mathfrak{M}$  конечно и состоит из  $n$  чисел  $1, 2, \dots, n$ , П. м.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  обозначается символом  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ , или  $\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i$ , или  $\Pi_{i=1}^{i=n} A_i$ . Если  $\mathfrak{M}$  — счетное множество и состоит из чисел натурального ряда  $N$ , то П. м.  $A_1, A_2, \dots$  обозначается символом  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  (или  $\Pi_{i=1}^{\infty} A_i$ ; или  $A_1 \cap A_2 \cap \dots$ , или  $A_1 A_2 \dots$ ).

П. м. является одной из важнейших операций над множествами. Для сравнения ее с другими операциями см. *Теоретико-множественные операции*.

П. м. может быть *пустым множеством*. Такие множества, для которых П. м. пусто, называются *непересекающимися*. П. м. удовлетворяет законам *коммутативности*, *ассоциативности* и *идемпотентности*:  $A \cap B = B \cap A$ ;  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;  $A \cap A = A$ . П. м. связано с объединением множеств двумя законами *дистрибутивности*:  $A \cap (\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{M}} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{M}} (A \cap B_\alpha)$ ,  $A \cup (\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{M}} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{M}} (A \cup B_\alpha)$ . Эти два закона дистрибутивности двойственны (см. *Двойственность*).

**Примеры.** 1. Пусть  $A$  — множество всех четных чисел и  $B$  — множество всех чисел, кратных 3. Тогда  $A \cap B$  — множество чисел, кратных 6.

2.  $A$  — множество всех окружностей и  $B$  — множество всех эллипсов в длине большой полуоси, равной 1. Тогда  $A \cap B$  — множество всех окружностей единичного радиуса.

**ПЕРЕСТАНОВКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ** — изменение порядка дифференцирований. При П. д. результат дифференцирования не изменится, если смешанные производные непрерывны. Точнее, справедлива теорема о П. д.: пусть



частные производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ , функции  $u = u(x, y)$  непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$  и, следовательно,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  существуют в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ ; тогда в этой точке  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ . Немецкий математик Шварц показал, что в этой теореме достаточно предположить, кроме существования  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$  в окрестности точки, непрерывность в точке  $(x_0, y_0)$  лишь одной из смешанных производных  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$  (см. *Частная производная*).

Имеет место более общая теорема о П. д.: пусть в точке  $(x_0, y_0)$  частные производные до  $(k-1)$ -го порядка включительно и смешанные производные  $k$ -го порядка функции  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  непрерывны; тогда значение любой  $k$ -й смешанной производной в точке  $(x_0, y_0)$  не зависит от порядка последовательности дифференцирований. В этом случае число различных частных производных  $k$ -го порядка равно числу сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $k$ , т. е. равно  $(n+k-1)!/k!(n-1)!$

**Пример** изменения результата от П. д.: для функции  $u = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$  при  $x^2 + y^2 > 0$  и  $u = 0$  в точке  $(0, 0)$  имеем:  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1$ , но  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 1$ . В этом случае при перемене П. д. меняется результат, так как смешанные производные в точке  $(0, 0)$  разрывны.

**ПЕРЕСТАНОВКА С ПОВТОРЕНИЯМИ** из  $n$  элементов множества  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  — частный случай размещения с повторениями из  $n$  элементов множества  $M$  по  $k$ . Если в некотором размещении с повторениями из  $n$  элементов по  $k$  элемент  $a_i$  повторяется  $i$  раз ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то такое размещение называют П. с п. Число различных П. с п., в которых элементы  $a_1, a_2, \dots, a_n$  повторяются соответственно  $w_1, w_2, \dots, w_n$  раз, равно:

$$\frac{(\sum w_i)!}{\prod (w_i!)} = \frac{(w_1 + w_2 + \dots + w_n)!}{w_1! w_2! \dots w_n!}.$$

Лит.: [18].

**ПЕРЕСТАНОВКА СИМВОЛОВ** — всякое размещение из  $n$  символов по  $n$ . Число различных П. из  $n$  символов равно  $n!$  П. является одним из основных понятий комбинаторики.

**ПЕРИМЕТР МНОГОУГОЛЬНИКА** — сумма длин его сторон.

**ПЕРИОД ФУНКЦИИ** — некоторое действительное число  $\tau$  такое, что для всех  $x$  из области определения функции  $f$  числа  $x + \tau$  и  $x - \tau$  принадлежат области определения функции  $f$  и  $f(x) = f(x - \tau) = f(x + \tau)$ . Однако чаще всего лишь наименьшее из всех таких чисел  $\tau$  положительное число  $T$  называют П. ф. (если такое наименьшее число существует).

См. также: *Периодическая функция*.

**ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ДРОБЬ**:  $1^0$ . П. десятичная дробь — такая бесконечная десятичная дробь

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots,$$

для которой существуют такие натуральные числа  $N$  и  $p$ , что  $a_{n+p} = a_n$  для всех натуральных чисел  $n \geq N$ .

**П р и м е р ы.** 1) Дробь  $2,5436436\dots$  периодическая,  $N = 2$ ,  $p = 3$ ; 2)  $\overline{5},64222\dots$  (читается: «пять с минусом шестьдесят четыре сотых и два в периоде») — П. десятичная д., которую записывают короче:  $\overline{5},64(2)$ , т. е. период (число 2) записывают в скобках. У этой П. десятичной д.  $N = 3$ ,  $p = 1$ .

П. десятичная д. называется **ч и с т о й** П. д., если ее период (группа повторяющихся цифр) начинается сразу после запятой, т. е. когда  $N = 1$ , а период может содержать любое конечное число цифр. Так, дробь  $8, (3)$  — чистая П. д. Если П. десятичная д. содержит еще число, заключенное между целой частью и периодом, то такая П. д. называется **с м е ш а н н о й**; число П. д., стоящее между целой частью и периодом, называется **п р е д п е р и о д о м** этой дроби. Приведенные выше два примера П. десятичных д. — примеры смешанных П. десятичных д. П. десятичные д. с периодом (9) можно записать в виде П. десятичной дроби с периодом (0) и обратно, например:  $0,1(9) = 0,2(0)$ . П. десятичные д. с периодом (9) и (0) представляют собой обычные, конечные десятичные дроби; так,  $2,3(9) = 2,4$ , а  $5,48000\dots = 5,48$ .

Всякая П. десятичная д. является рациональным числом вида  $p/q$ , где  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , верно и обратное утверждение: всякое рациональное число вида  $p/q$  с указанными ограничениями можно представить в виде П. десятичной д.

Пусть надо записать рациональное число  $-2\frac{5}{7}$  в виде П. десятичной д. Для этого выделяют целую часть числа, т. е.  $-3$ , а дробную часть числа  $2/7$  превращают в десятичную дробь, пользуясь известным алгоритмом деления («столбиком»). Следовательно, имеем:

$$-2\frac{5}{7} = -3 + \frac{2}{7} = -3 + 0,2857142857142\dots = -3 + 0, (285714) = \overline{-3},(285714).$$

Превратим теперь П. десятичную д. в рациональное число (в обыкновенную дробь), пользуясь формулой суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$\text{при } |q| < 1: S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

$$\text{Например, } 0, (3) = 0,3333\dots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots = \frac{0,3}{1 - 0,1} = \frac{0,3}{0,9} = 3/9 = 1/3.$$

**2°. П. непрерывная дробь (П. цепная дробь). Непрерывная дробь**

$$\alpha = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \dots$$

называется периодической, если в разложении  $\alpha$  после элементов  $a_0, a_1, \dots, a_{s-1}$  происходит повторение элементов  $a_s, \dots, a_{s+k-1}$ , т. е. длина периода равна  $k(k \geq 1)$ , и число  $\alpha$  записывается в виде  $\tilde{\alpha} = a_0 + 1/(a_1 + \dots + 1/(a_{s-1} + 1/(a_s + \dots + 1/(a_{s+k-1} + \dots$ ; если  $s = 0$ , то непрерывная дробь разлагается в чистую П. непрерывную д.:

$$\alpha = a_0 + 1/(a_1 + \dots + 1/(a_{k-1} + \dots$$

**Пример.** Непрерывная дробь  $\alpha = 1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(3 + \dots$  является П. непрерывной д. Элементы этой дроби 1, 1, 3 составляют период ее; длина периода  $k = 3$ . Величины П. непрерывных д. есть подмножество множества действительных чисел: величины П. непрерывных д. являются квадратичными иррациональностями, и всякая квадратическая иррациональность разлагается в П. непрерывную д. См. также: *Лагранжа теорема, Иррациональные числа, Действительные числа, Подходящая дробь. Непрерывная дробь.*

**ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ**  $f$  действительного аргумента (действительной переменной) — функция, для которой существует такое число  $\tau > 0$ , что для всякого  $x$  из области определения числа  $x + \tau$  и  $x - \tau$  также принадлежат области определения и для любого  $x$  справедливо равенство

$$f(x) = f(x + \tau) \text{ и } f(x) = f(x - \tau).$$

Наименьшее число  $T$  из всех таких чисел  $\tau$  обычно называют *периодом функции*  $f$ , если такое число  $T$  существует. Если  $T$  — период функции  $f$  (наименьший период), то всякое число  $nT$ , кратное наименьшему периоду ( $n$  — любое целое), также будет периодом функции. Однако существуют функции, не имеющие наименьшего периода, например *функция Дирихле*, но любое рациональное число есть период этой функции. Функция дробная часть числа  $x$ , т. е.  $y = \{x\}$ , имеет наименьший период  $T = 1$ . Постоянная функция ( $y = C$ ) периодическая, периодом ее может служить любое положительное число, а наименьшего периода нет. Синус и косинус — периодические функции с периодом  $T = 2\pi$ , тангенс и котангенс имеют период  $T = \pi$ . Сумма, разность, произведение и частное П. ф. с периодом  $T$  есть также П. ф. с одним из периодов  $T$ .

Если функция  $y = f(x)$  — П. ф. и непрерывная для  $-\infty < x < +\infty$ , и не является постоянной величиной ( $y \neq \text{const}$ ), то среди всех ее периодов  $\tau$  найдется наименьший  $T > 0$ , который, собственно, и называется в этом случае периодом функции. Полный график П. ф. получается последовательными сдвигами вдоль оси  $Ox$  в положительном или отрицательном направлении на период части ее графика, построенной для числового отрезка  $a \leq x \leq a + T$  длины  $T$ .

См. также: *Ступенчатая функция, Тригонометрические функции, Четная функция, Нечетная функция, Ограниченная функция, Однолистая функция, Однородная функция.*

**ПЕРПЕНДИКУЛЯР** к прямой  $a$  — прямая, пересекающая прямую  $a$  под прямым углом. Если точка  $A$  лежит вне прямой  $a$  (рис. 50), прямая  $AM$  есть П. к прямой  $a$  и если точка  $P$  — точка пересечения прямой  $a$  с прямой  $AM$ , то точка  $P$  называется основанием П., проведенного через точку  $A$  к прямой  $a$ ; расстояние от точки  $A$  до точки  $P$  называется длиной П., проведенного через точку  $A$  к прямой  $a$ , или расстоянием от точки  $A$  до прямой  $a$ . Доказывается единственность П., проведенного через точку  $A$  к прямой  $a$  в плоскости, определяемой точкой  $A$  и прямой  $a$ . В пространстве через точку  $A$  можно провести бесконечное множество прямых, перпендикулярных к прямой  $a$ , но П. также только один.

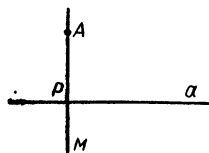


Рис. 50

Длина П. определяется аналогично длине касательной, проведенной через данную точку к окружности.

Подобным же образом определяется П. к данной плоскости: П. к плоскости  $\alpha$  есть прямая, пересекающая плоскость  $\alpha$  и образующая прямой угол с любой прямой, лежащей в плоскости  $\alpha$ . Через данную точку  $A$  можно провести единственный П. к данной плоскости  $\alpha$ . Если прямая  $AM$  есть П. к плоскости  $\alpha$  и  $P$  — точка пересечения П. с  $\alpha$ , то длина отрезка  $AP$  (расстояние от точки  $A$  до точки  $P$ ) называется длиной П., проведенного через точку  $A$  к плоскости  $\alpha$ , или расстоянием от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$ . П. к плоскости называют также перпендикулярной прямой к этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой к плоскости (прямой и плоскости) выражается следующей теоремой (теорема о двух перпендикулярах): прямая, перпендикулярная каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости (на плоскости), перпендикулярна этой плоскости. Следует отметить, что перпендикулярность прямой и плоскости — свойство взаимное: если  $a \perp \alpha$ , то и  $\alpha \perp a$ .

Лат. perpendicularis — отвес.

См. также: *Наклонная*.

**ПЕРСПЕКТИВА** — способ изображения геометрических фигур на плоскости, заключающийся в следующем. Пусть даны некоторая плоскость  $\alpha'$ , фигура  $\Phi$  (читается: «Фи» большое) и некоторая точка  $S$ , не принадлежащая ни плоскости  $\alpha'$ , ни фигуре  $\Phi$  (рис. 51). Плоскость  $\alpha'$  будем называть плоскостью проекций. Сначала рассмотрим в качестве фигуры  $\Phi$  точку  $M$  (рис. 51, а). Проведем прямую  $SM$ , пересекающую плоскость проекций  $\alpha'$  в точке  $M'$ . Точку  $M'$  называют П. или *центральной проекцией* точки  $M$  из точки (центра П.)  $S$  на плоскость  $\alpha'$ .

П. фигуры  $\Phi$  (рис. 51, б) является множество П. всех точек, принадлежащих фигуре  $\Phi$ , если рассматривается тот же центр  $S$  и плоскость  $\alpha'$ . П. с центром  $S$  и плоскостью проекций  $\alpha'$  обозначают П.  $(S, \alpha')$ . П. фигуры  $\Phi$  есть фигура  $\Phi'$ , т. е.  $\Phi'$  есть центральная проекция фигуры  $\Phi$  из центра  $S$  на плоскость  $\alpha'$ . Метод П. положен в основу *проективной геометрии* при синтетическом ее изложении.

Лат. perspicere — видеть сквозь, видеть насквозь.

См. также: *Проекция, Чертеж, Рисунок, Ортогональная проекция, Аксонометрия, Полное изображение фигуры, Неполное изображение фигуры*.

**ПИРАМИДА** — многогранник, полученный от пересечения *многогранного угла* и полупространства  $u$ , если вершина многогранного угла принадлежит  $u$ , а граница  $u$  — плоскость — пересекает все ребра угла в различных точках. Можно П. определить и так: П. — многогранник, одна из граней которого — многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину.

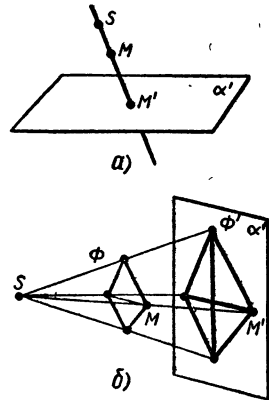


Рис. 51

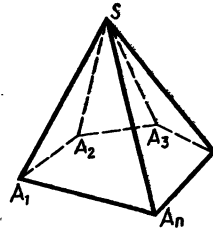


Рис. 52

Вершина многогранного угла называется вершиной  $\Pi$ , полученной от пересечения многогранного угла и полупространства. Если вершина многогранного угла —  $S$ , а точки  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  — точки пересечения всех ребер угла  $S$  плоскостью — границей полупространства  $u$ , то многоугольник  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  называют основанием  $\Pi$ . (рис. 52). Если основание  $\Pi$ . — выпуклый многоугольник, то  $\Pi$ . — выпуклая фигура (выпуклое тело); если же основание  $\Pi$ . — невыпуклый многоугольник, то  $\Pi$ . — невыпуклая фигура (невыпуклое тело). Если основание  $\Pi$ . — треугольник, то  $\Pi$ . называется треугольной; если основание  $\Pi$ . — четырехугольник, то  $\Pi$ . называют четырехугольной, и т. д. Треугольная  $\Pi$ . называется также *тетраэдром*.  $\Pi$ ., основанием которой является  $n$ -угольник, называется  $n$ -угольной.  $\Pi$ . называется правильной, если основание ее — правильный  $n$ -угольник и вершина  $S$  ортогонально проектируется в центр основания. Отрезки  $A_1S, A_2S, \dots, A_nS$ , соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются боковыми ребрами  $\Pi$ . (длины этих отрезков также называются боковыми ребрами  $\Pi$ .).

Расстояние от вершины  $\Pi$ . до плоскости основания ее (или отрезок перпендикуляра, проведенного через вершину  $\Pi$ . к плоскости ее основания, или длина этого перпендикуляра) называется *высотой*  $\Pi$ . Треугольники  $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$  называются боковыми гранями  $\Pi$ . Высота боковой грани правильной  $\Pi$ ., проведенная из вершины ее, называется *апофемой*  $\Pi$ .  $\Pi$ .  $n$ -угольная имеет  $n + 1$  граней и  $2n$  ребер. В правильную  $\Pi$ . можно вписать сферу (или шар) и вокруг нее можно описать сферу (или шар). В любую треугольную  $\Pi$ . можно вписать сферу и вокруг любой треугольной  $\Pi$ . можно описать сферу; в каждом из этих случаев сфера будет единственной.

Объем  $\Pi$ . вычисляется по формуле  $V = (1/3)QH$ , где  $Q$  — площадь основания,  $H$  — высота  $\Pi$ . Если  $\Pi$ . треугольная, то ее объем можно вычислить по формуле  $V = (1/3)rS$ , где  $r$  — радиус вписанной сферы,  $S$  — площадь полной поверхности  $\Pi$ ; формула объема верна и для правильной  $\Pi$ . Если  $B$  — вершина  $\Pi$ .,  $A_1A_2 \dots A_n$  — основание ее, то  $\Pi$ . обозначают так:

$$BA_1A_2A_3 \dots A_n.$$

См. также: *Бипирамида, Симплекс, Правильный многогранник.*

**ПИФАГОРА ТЕОРЕМА** — теорема: квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов. Стороны, естественно, измерены в одних и тех же единицах длины. Иногда  $\Pi$ . т. формулируют короче: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. В этой формулировке под гипотенузой мыслится ее длина, как часто в элементарной геометрии (в школьном курсе ее) под высотой, медианой и стороной треугольника подразумевается длина этих отрезков.  $\Pi$ . т. имеет место только в геометрии Евклида.  $\Pi$ . т. эквивалентна аксиоме *параллельных* (прямых).  $\Pi$ . т. иногда называют «пифагорова теорема». Доказательство  $\Pi$ . т. приписывается древнегреческому ученому Пифагору (VI в. до н. э.), хотя, как предполагают некоторые исследователи по истории математики, она была известна и до него. В первоначальной формулировке  $\Pi$ . т. устанавливала зависимость между площадями квадратов, построенных на гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника: площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах,

**ПИФАГОРА ЧИСЛА** — тройки натуральных чисел (целых положительных чисел)  $x, y, z$ , удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Все решения этого уравнения получаются из формул:

$$x = (a^2 - b^2)n, y = 2abn, z = (a^2 + b^2)n,$$

где  $a, b, n$  — произвольные натуральные числа ( $a > b$ ); к множеству решений этого уравнения присоединяются еще решения уравнения, в котором  $x$  и  $y$  меняются местами. П. ч. могут быть истолкованы как длины сторон некоторых прямоугольных треугольников. Первыми П. ч. являются тройки чисел 3, 4, 5 и 5, 12, 13.

Решениями уравнений с целыми коэффициентами в натуральных, целых и дробных числах занимались многие математики древности: Пифагор (VI в. до н. э.), Диофант (III в. н. э.). В память о последнем такие уравнения называются *диофантовыми уравнениями*. Такими уравнениями интересовались математики-классики: П. Ферма (1601—1665), Л. Эйлер (1707—1783), П. Л. Чебышев (1821—1894) и др. Ряд советских математиков также внесли определенный вклад в теорию диофантовых уравнений.

П. ч. называют также: *пифагоровы числа*.

См. также: *Ферма великая теорема, Пелля уравнения*.

Лит.: [75]

**ПИ-ЧИСЛО** — число, равное отношению длины окружности к длине ее диаметра. Обозначением этого числа греческой буквой  $\pi$  впервые пользовался английский математик У. Джонсон (1706), и оно стало общепринятым после одной из работ петербургского математика Л. Эйлера (1736). П.-ч. можно записать в виде бесконечной непериодической дроби:  $\pi = 3,14159265\dots$

В конце XVIII в. немецким математиком И. Ламбертом и французским математиком А. Лежандром было доказано, что число  $\pi$  является *иррациональным*, а в 1882 г. немецкий математик Ф. Линдеман доказал, что П.-ч. не может удовлетворять никакому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами (не может быть корнем никакого такого уравнения), т. е. это число является *трансцендентным*. Из теоремы Линдемана следует, что невозможно построить циркулем и линейкой отрезок длины, равной  $\pi$ . Это утверждение окончательно решает вопрос о невозможности решения задачи о *квадратуре круга*.

*Трансцендентные числа*  $e$  и  $\pi$  связаны замечательной зависимостью, выраженной известной формулой Эйлера  $e^{2\pi i} = 1$ , из которой глубже выясняется природа числа  $\pi$ . Хорошее приближение числа  $\pi$  дается суммой двух квадратических иррациональностей:  $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ , однако равенство здесь рассматривается приближенное, так как правая часть его есть число алгебраическое, а левая — трансцендентное, и, следовательно, эти числа равны быть не могут.

Обозначение П.-ч. происходит от начальной буквы греческого слова *периферей* — окружность, периферия.

См. также: *Окружность, Сфера, Стирлинга формула, Тор, Тангенс, Меццево число, Лудольфово число*.

**ПЛАНИМЕТР** — простейший математический прибор, позволяющий приближенно вычислять площади плоских фигур. Существуют различные конструк-

ции  $P$ . Использование  $P$ , основано на следующей геометрической т е о р е м е: если неизменный по длине прямолинейный отрезок  $AB$  непрерывно передвигается (перемещается) по плоскости так, что в результате такого передвижения он возвращается в исходное положение, т. е. точка  $A$  — в точку  $A$ , точка  $B$  — в точку  $B$ , то площадь фигуры, «заметенная» при таком движении отрезком  $AB$ , равна разности площадей, ограниченных замкнутыми путями, описанными его концами. Некоторые  $P$ . устроены так, что при обводе штифтом  $P$ . контура фигуры на барабане счетного колесика можно прочесть площадь этой фигуры.

См. также: *Пантограф*.

**ПЛАНИМЕТРИЯ** — часть курса геометрии, в которой изучаются свойства фигур, расположенных в одной плоскости.

При систематическом изучении школьного курса геометрии обычно начинают с изучения  $P$ ., называемой иногда 1-й частью геометрии, а затем приступают к изучению 2-й части геометрии — *стереометрии*, изучающей пространственные фигуры. Основными понятиями школьного курса  $P$ . являются «точка», «прямая», «плоскость» и «расстояние» (между двумя точками или от точки до точки), а также некоторые общематематические понятия, такие, как «множество», «отображение» множества на множество и др.

Содержание школьного курса  $P$ . из года в год несколько изменяется, однако его ядро остается в целом неизменным.  $P$ . содержит: 1. Введение (в нем дается определение понятия фигуры как множества точек, изучаются свойства расстояний, определяются понятия аксиомы и теоремы и другие понятия). 2. Перемещения (движения, изометрия) плоскости, т. е. преобразования плоскости, сохраняющие расстояние между точками. 3. Параллельность. 4. Построение треугольников. Четырехугольники. 5. Многоугольники и их площади. 6. Окружность и круг. 7. Подобие и гомотетия. 8. Тригонометрические функции. 9. Метрические соотношения в треугольнике. 10. Вписанные и описанные многоугольники. 11. Длина окружности и площадь круга.

Были попытки излагать обе части геометрии ( $P$ . и стереометрию) вместе, слитно, изучая плоские и пространственные фигуры одновременно.

Наиболее полное и систематическое изложение  $P$ . впервые было сделано древнегреческим ученым Евклидом (IV в. до н. э.) в его труде «Н а ч а л а» (элементы), содержащем 13 книг.

Лат. *planum* — плоскость, греч. — *μετρον* — измеряю.

См. также: «Начала» Евклида, *Геометрия*, *Неевклидовы геометрии*, *Сферическая геометрия*, *Проективная геометрия*, *Проективная плоскость*.

**ПЛОСКАЯ КРИВАЯ** — кривая, все точки которой принадлежат одной плоскости. *Кручение*  $P$ . к. равно нулю.

**ПЛОСКОСТЬ** — одно из основных понятий геометрии. При первоначальном ознакомлении с понятием  $P$ . представление о  $P$ . сравнивается с представлением о гладкой поверхности воды, отполированного стола и т. д. При дальнейшем изучении систематического курса геометрии  $P$ . принимается за исходный объект, косвенное определение которого дается в аксиомах геометрии. Важные свойства плоскости выражены в таких, например, а к с и о м а х: 1. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и все точки прямой принадлежат плоскости. 2. Три точки, не лежащие на одной прямой, принадлежат только одной плоскости.

Лит.: [33].

**ПЛОТНОЕ МНОЖЕСТВО.** Множество  $M$  плотно в топологическом пространстве  $P \supset M$ , если в любой окрестности любой точки множества  $P$  найдется точка множества  $M$ . Например, множество рациональных чисел плотно в множестве всех действительных чисел. Когда  $P = M$ , говорят, что  $M$  плотно в себе.

**ПЛОТНОСТИ ТОЧКА** данного множества, в котором определена мера, такая точка, что отношение *меры* этого множества, лежащего в окрестности этой точки, к мере окрестности стремится к единице, когда окрестность стягивается к точке. Например, в множестве *трансцендентных чисел* каждая точка есть П. т.

**ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ** — значение дифференциальной функции распределения непрерывной случайной величины  $X$  в точке  $x$ . Название П. в. объясняется следующим образом. Пусть  $f(x)$  — дифференциальная функция распределения случайной величины  $X$ . Тогда вероятность  $P(x \leq X < x + \Delta x)$  того, что случайная величина  $X$  примет значение в промежутке  $[x, x + \Delta x]$ , равна  $\int_x^{x+\Delta x} f(x) dx$ . Средняя плотность вероятности в интервале  $(x, x + \Delta x)$  есть отношение  $P(x \leq X < x + \Delta x)$  к  $\Delta x$ . Истинная П. в. есть предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x) dx}{\Delta x} = f(x);$$

последнее равенство справедливо для точек  $x$ , в которых функция  $f(x)$  непрерывна.

Определение П. в. позволяет для каждой непрерывной случайной величины  $X$  построить дискретную случайную величину  $\tilde{X}$ , которая в достаточной мере приближает величину  $X$ . Именно пусть значение величины  $\tilde{X}$  составляет множество  $\{x_k\}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и вероятность  $P_k$  того, что величина  $\tilde{X}$  примет значение  $x_k$  и равна  $f(x_k)\Delta x$ . На этом приеме основаны выводы некоторых формул, связанных с непрерывной случайной величиной — см. *Математическое ожидание, Дисперсия*.

На графике дифференциальной функции распределения П. в. изображается ординатой, соответствующей точке  $x$ , в то время как вероятности того, что  $X$  попадает в интервал  $(a; b)$ , изображаются площадями соответствующих криволинейных трапеций.

Свойства П. в. см. в статье *Дифференциальная функция распределения*.

Лит.: [17, 26].

**ПЛОЩАДЬ:** 1°. П. многоугольника — неотрицательная функция на множестве многоугольников, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) Конгруэнтные многоугольники имеют равные П.
- 2) Если многоугольник разбит на несколько частей (многоугольников), не имеющих общих внутренних точек, то П. всего многоугольника равна сумме П. его частей (свойство аддитивности П.).
- 3) Существует *квадрат*, площадь которого равна единице.

2°. П. плоской фигуры. Пусть на плоскости дана произвольная фигура  $P$ , представляющая собой ограниченную замкнутую область, границей которой



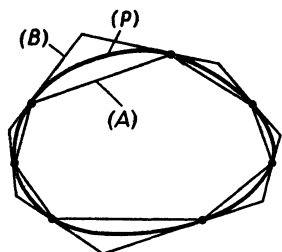


Рис. 53

является замкнутая кривая. И пусть  $(A)$  — множество многоугольников, целиком содержащихся в  $P$ , а  $(B)$  — множество многоугольников, целиком содержащих  $P$  (рис. 53),  $A$  и  $B$  — соответственно их П.; тогда  $A \leq B$ . Множество чисел  $\{A\}$  имеет точную верхнюю границу  $p^* = \sup \{A\}$ , а множество  $\{B\}$  — точную нижнюю границу  $p_* = \inf \{B\}$  ( $\{A\}$ , ограничено сверху любым  $B$ , а  $\{B\}$  ограничено снизу любым  $A$ ). Если обе границы  $p^*$  и  $p_*$  совпадают, то общее их значение  $p = p^* = p_*$  называется П. плоской фигуры  $P$ , а фигуру  $P$  называют квадратуемой. Если фигура  $P$  разбита (разделена) на

две фигуры  $P_1$  и  $P_2$ , не имеющих общих внутренних точек, то квадратуемость каждой из этих фигур  $P_1$  и  $P_2$  влечет квадратуемость всей фигуры  $P$ , причем всегда площадь  $P$  равна сумме площадей  $P_1$  и  $P_2$ , т. е.  $P = P_1 + P_2$  или  $S(P) = S(P_1) + S(P_2)$ , где  $S(P)$  — площадь фигуры  $P$ , аналогично обозначаются и слагаемые в правой части. Следовательно, П. — аддитивная функция; заданная на множестве плоских фигур.

Для того чтобы фигура  $P$  была квадратуема, необходимо и достаточно, чтобы ее контур (границная линия) имел П., равную нулю, т. е. мог быть покрыт многоугольной областью с произвольно малой П. П., равную нулю, имеет любая непрерывная кривая, выражаемая уравнением вида

$$y = f(x) \text{ или } x = g(y), \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

Если фигура  $P$  ограничена одной или несколькими гладкими кривыми, то она заведомо квадратуема. П. различных плоских фигур вычисляется при помощи обычных определенных интегралов. Так, П. криволинейной трапеции, ограниченной кривыми  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  (рис. 54), дается формулой

$$p = \int_A^B (y_2 - y_1) dx = \int_A^B (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

П.  $p$  сектора  $AOB$ , ограниченного дугой  $AB$  некоторой кривой, заданной полярным уравнением  $\rho = \rho(\varphi)$ , и двумя радиус-векторами  $OA$  и  $OB$  (рис. 55), дается формулой

$$p = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\rho(\varphi)]^2 d\varphi.$$

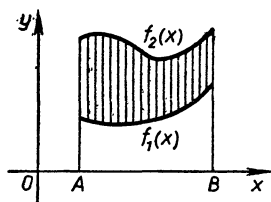


Рис. 54

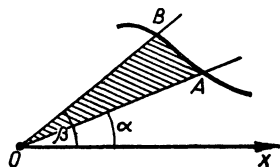


Рис. 55

П. п. ф. может быть вычислена и с помощью криволинейного интеграла: П. фигуры ( $\Phi$ ), ограниченной кусочно-гладким контуром  $\alpha$ , дается формулами:

$$\Phi = - \int_{(\alpha)} y dx, \quad \Phi = \int_{(\alpha)} x dy, \quad \Phi = \frac{1}{2} \int_{(\alpha)} x dy - y dx.$$

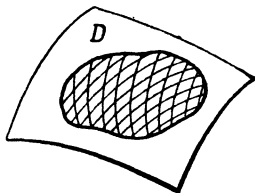


Рис. 56

Указанные формулы для вычисления площадей могут быть рассмотрены как частные случаи формулы Грина. П. п. ф. может быть вычислена и с помощью двойного интеграла  $\Phi = \iint_{(\Phi)} dx dy$ , взятого по всей фигуре ( $\Phi$ ).

3°. П. поверхности многогранника — сумма площадей его граней.

4°. П. замкнутой области  $D$  поверхности. Пусть на поверхности задана некоторая замкнутая область  $D$ . Разобьем ее на частичные области  $D_1, D_2, \dots, D_n$  (рис. 56). Затем во внутренней точке каждой из областей  $D_i$  построим касательную плоскость и спроектируем на нее соответствующую частичную область. Обозначим площадь проекции частичной области  $D_i$  через  $\Delta S_i$ . Если теперь составить сумму всех площадей проекций, т. е. взять  $S_n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i$  и перейти к пре-

делу при неограниченном возрастании числа частичных областей так, чтобы каждая область стягивалась к точке, то мы получим число  $S$ , называемое П. з. о.  $D$  п. Итак, П. з. о.  $D$  п. вычисляется по формуле

$$S = \iint_{(D_1)} \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

где  $E, G, F$  — гауссовы коэффициенты поверхности,  $D_1$  — область изменения криволинейных координат  $u$  и  $v$ , соответствующая площади  $S$ .

В частном случае, когда поверхность задана явным уравнением  $z = f(x, y)$ , где  $(x, y)$  изменяются в области  $D_1$  на плоскости  $xOy$ , П. з. о.  $D$  на плоскости вычисляется по формуле

$$S = \iint_{(D_1)} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

5°. П. поверхности вращения, т. е. П. поверхности, образованной вращением кривой  $y = f(x)$  вокруг оси  $Ox$  ( $a \leq x \leq b, f(x) \geq 0$ ) вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

См. также: Сфера, Конус, Цилиндр.

6°. П. криволинейной трапеции — площадь, определяемая, как и П. плоской фигуры, и вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx,$$

где  $f(x)$  — неотрицательная непрерывная функция на отрезке  $[a; b]$ .

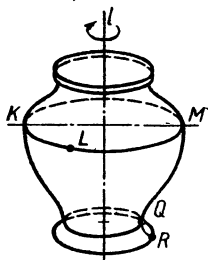


Рис. 57

Две плоские фигуры, имеющие равные П., называются равновеликими. Всякие два равносоставленных многоугольника будут и равновелики, верно и обратное утверждение.

См. также: *Объем, Длина отрезка, Длина ломаной, Длина кривой, Мера множества, Поверхность.*

**ПЛЮС** — знак «+» для обозначения действия сложения, а впоследствии и знака при положительных числах. П. был введен немецкими математиками XV в. Есть предположение, что знак П. образовался от латинского *et*, означающего союз «и»; это слово затем стали писать в виде буквы *t*, а затем стали писать просто знак П.

См. также: *Математические знаки, Числовая ось.*

**ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ** — поверхности, образуемые вращением плоской линии вокруг прямой — оси вращения, расположенной в плоскости этой линии. Если кривая имеет уравнение  $y = f(x)$  (в декартовой системе координат  $x, y$  плоскости), то уравнение П. в. этой кривой вокруг оси  $Ox$  имеет вид:

$$\sqrt{y^2 + z^2} = |f(x)|,$$

где  $z$  — третья декартова координата пространства, дополняющая координаты  $x, y$  на плоскости. Примерами П. в. являются сфера (вращение полуокружности вокруг диаметра), прямой круговой конус (вращение прямой вокруг другой прямой, пересекающей первую) и др.

В связи с П. в. рассматриваются задачи о вычислении объема  $V$  и площади  $S$  П. в. Если П. в. образована вращением кривой  $y = y(x)$ , заданной на отрезке  $[a; b]$ , то  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ ,  $S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ .

Линии пересечения П. в. с плоскостями, проходящими через ось П. в., называют меридианами  $MQR$  (рис. 57). Линии пересечения П. в. с плоскостями, перпендикулярными оси вращения, называются параллелями  $KLM$  (рис. 57). Меридианы и параллели образуют на П. в. две системы линий кривизны. См. также *Катеноид*.

**ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ.** Пусть  $S$  — некоторая ограниченная область на гладкой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве и  $f$  — функция, определенная в  $S$ ; пусть далее  $(T) S \Rightarrow \bigcup_i A_i$ ; разбиение  $S$  в сумму непересекающихся подмножеств (ячеек),  $\mu(A_i)$  — площадь фигуры  $A_i$  (предполагается, что все  $\mu(A_i)$  определены),  $P_i \in A_i$ ,  $d_i$  — диаметр множества  $A_i$ ,  $d = \max d_i = l(T)$  — диаметр разбиения  $T$ .

П. и. первого рода функции  $f$  по поверхности  $S$  обозначается  $\iint_S f dS$ , и по определению  $\iint_S f dS = \lim_{l(T) \rightarrow 0} \sum f(P_i) \mu(A_i)$ . (\*) Здесь предполагается, что предел в правой части формулы существует при любом выборе точек  $P_i \in A_i$  и любом способе измельчения разбиения  $T$ , лишь бы только  $l(T) \rightarrow 0$ .

К вычислению пределов вида (\*) сводятся многие задачи из геометрии, физики и других наук.

П. и. обладает следующими свойствами: 1)  $\iint_S (f + g) ds = \iint_S f ds + \iint_S g ds$  при любых функциях  $f$  и  $g$  на  $S$ , для которых существуют интегралы правой части формулы. 2)  $\iint_S C f ds = C \iint_S f ds$  для любого числа  $C$ . 3)  $\iint_{S_1 \cup S_2} f ds = \iint_{S_1} f ds + \iint_{S_2} f ds$  для всякой  $f$  на  $S_1 \cup S_2$ , где  $S_1$  и  $S_2$  — непересекающиеся множества. 4) Если  $f \leq g$  на  $S$ ,  $\iint_S f ds$ ,  $\iint_S g ds$  существуют, то  $\iint_S f ds \leq \iint_S g ds$ . 5) Для связной области  $S$  и непрерывной функции  $f$  справедливо соотношение  $\iint_S f ds = f(P^*) \mu(S)$ , где  $P^*$  — некоторая точка из  $S$ ,  $\mu(S)$  — площадь  $S$ . 6)  $\iint_S 1 ds = \mu(S)$ .

Если область  $S$  ограничена и замкнута и  $f$  непрерывна, то  $\iint_S f ds$  существует (если гладкость поверхности  $S$  не меньше класса  $C^1$ ).

П. и. может быть сведен к двойному интегралу по формуле

$$\iint_S f ds = \iint_D f(x, y) \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (**)$$

Здесь поверхность  $S$  предполагается заданной параметрически  $\vec{M} = \vec{M}(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ .  $E, F, G$  — коэффициенты первой квадратической формы поверхности.  $E = (\vec{M}_u, \vec{M}_u)$ ,  $F = (\vec{M}_u, \vec{M}_v)$ ,  $G = (\vec{M}_v, \vec{M}_v)$ ,  $\vec{M}_u, \vec{M}_v$  — частные производные векторной функции  $\vec{M} = \vec{M}(u, v)$  по параметрам  $u$  и  $v$ ,  $(u, v)$  — скалярное произведение.

В том частном случае, когда поверхность  $S$  задана уравнением  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , формула (\*\*) имеет вид:  $\iint_S f ds = \iint_D f(x, y) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$ ; здесь  $z_x, z_y$  — частные производные функции  $z$  по  $x, y$  соответственно.

П. и. первого ряда называются также П. и. по площади поверхности.

Для определения П. и. второго рода сохраним все обозначения, введенные в начале статьи, изменив только смысл  $\mu(A_i)$ . Именно будем считать, что  $\mu(A_i)$  — площадь проекции ячейки  $A$  на координатную плоскость  $XY$ , взятая со знаком «плюс» или «минус», находится в соответствии с таким соглашением. Пусть область  $S$  ориентирована (см. *Ориентируемые поверхности*), т. е. в каждой точке  $P \in S$  выбрано одно из двух возможных направлений нормали, т. е. выбран единичный вектор  $\vec{n}$  нормали, причем выбор этот сделан таким образом, что  $\vec{n}$  непрерывно зависит от  $P$ . Положим  $\mu(A_i)$  равным площади ячейки  $A_i$ , умноженной на  $\cos \gamma$ , где  $\gamma$  — угол между векторами  $\vec{n}$  и единичным ортом  $\vec{k}$  оси  $z$ .

П. и. второго рода функции  $f$  по ориентированной поверхности  $S^+$  (+ означает ориентацию) по координатам  $x, y$ , обозначаются  $\iint_{S^+} f dx dy$ , и по определению

$\iint_{S^+} f dx dy = \lim_{(T) \rightarrow 0} \sum f(P_i) \mu(A_i)$ . Аналогичным образом определяются П. и. второ-

го рода по координатам  $x, z$  и  $y, z$ :  $\iint_{S^+} f dx dz$ ,  $\iint_{S^+} f dy dz$ . Рассматривают выражения

$\iint_{S^+} P dx dy + Q dx dz + R dy dz$ , понимая их как сумму трех интегралов от функции  $P, Q, R$  по координатам  $x y, x z, y z$  соответственно.

П. и. второго рода определены только для ориентируемых поверхностей. П. и. второго рода обладают свойствами, аналогичными перечисленным выше свойствам П. и. первого рода. Кроме этого, имеет место

$$\iint_{S^+} P dx dy + Q dx dz + R dy dz = - \iint_{S^-} P dx dy + Q dx dz + R dy dz.$$

Здесь  $S^-$  — поверхность  $S$  с ориентацией, противоположной ориентации  $S^+$ .

П. и. второго рода может быть сведен к двойному интегралу по следующему правилу:

$$\iint_{S^+} P dx dy = \pm \iint_D P(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

где  $z = z(x, y)$  — уравнение поверхности  $S$ ,  $D$  — область на плоскости  $XY$ , в которую проектируется  $S$ ; в формуле выбирается знак «+», если  $(\vec{n}, \vec{k}) > 0$ , и знак «минус» в противном случае. Если  $(\vec{n}, \vec{k})$  меняет знак в области  $S$ , то область  $S$  разбивают на части, в которых  $(\vec{n}, \vec{k})$  сохраняет постоянный знак.

В теории П. и. имеет место важная формула Остроградского (см. *Остроградского формула*), связывающая П. и. с объемным.

Лит.: [94].

**ПОВЕРХНОСТЬ** — одно из основных геометрических понятий. Это понятие является математической абстракцией «наивных» представлений о П. как о границе тела или следа движущейся линии.

Строгому определению П. предшествует определение частного случая П. так называемого простого куска П. Именно простой кусок П. есть множество  $D$  точек трехмерного пространства, гомеоморфное внутренности квадрата  $E^2$ . Гомеоморфизм между  $D$  и  $E^2$  задается функциями  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ , где  $u, v$  — координаты точки внутри квадрата  $E^2$ , а  $x, y, z$  — координаты соответствующей точки. Числа  $u, v$  называются криволинейными координатами в  $D$ . Более широким понятием по сравнению с простым куском П. является правильная П. — так называется такое множество точек пространства, что малая окрестность каждой его точки является простым куском П. Это определение (с необходимым уточнением) тождественно определению двумерного многообразия, вложенного в трехмерное пространство. Этому определению не удовлетворяют, однако, П. с краем, П. с особенностями и др.

Во многих задачах рассматривают уравнения вида  $\Phi(x, y, z) = 0$  и множество решений этого уравнения — точек трехмерного пространства — называют П. При этом П., так определенная, может быть весьма не похожа на свой «наивный» образ; например, множество решений уравнения может быть пустым.

П. являются одним из основных объектов исследования *дифференциальной геометрии*. Эта наука изучает гладкие поверхности и в основном локально, т. е. в небольшой окрестности данной точки, там, где П. имеет строение простого куска. Более общие вопросы, связанные с исследованием глобальных свойств П., т. е. свойств П. в целом, изучаются, как правило, теорией многообразий.

См. также: *Теория поверхностей*.

Лит.: [61, 71, 94].

**ПОВЕРХНОСТЬ ВТОРОГО ПОРЯДКА** — множество точек трехмерного аффинного или евклидова пространства, координаты  $x, y, z$  которых (в некоторой аффинной или евклидовой системе координат) удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (*)$$

в котором не все коэффициенты  $a_{ik}, i, k = 1, 2, 3$ , равны нулю. Это определение корректно, т. е. не зависит от рассматриваемой системы координат, поскольку при переходе от одной аффинной системы координат к другой новые и старые координаты выражаются друг через друга с помощью линейных уравнений, при этом вид уравнения (\*) не изменяется — левая часть уравнения по-прежнему представляет собой многочлен второй степени от трех переменных.

Основная задача теории П. в. п. состоит в классификации этих поверхностей, нахождении их инвариантов, а также в вычислении той системы координат в пространстве, в которой данная П. в. п. имеет самое простое — каноническое уравнение.

Всего различных видов П. в. п. — 17 (речь идет о классификации в евклидовом пространстве): *цилиндры* (эллиптический действительный или мнимый, параболический и гиперболический), *конусы* (действительные или мнимые), *эллипсоид* (действительный или мнимый), *гиперболоид* (одноплостный и двуплостный), *параболоид* (эллиптический и гиперболический), пара действительных пересекающихся плоскостей, пара мнимых плоскостей (пересекающихся по действительной прямой), пара совпавших плоскостей.

П. в. п., имеющие *центр*, называются центральными. Переход от декартовых координат  $x, y, z$  к декартовым координатам  $x', y', z'$  по формулам  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$

$= B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  переводит уравнение (\*) в уравнение вида

$$c_{11}x'^2 + c_{22}y'^2 + c_{33}z'^2 + 2c_{12}x'y' + 2c_{13}x'z' + 2c_{23}y'z' + 2c_{14}x' + 2c_{24}y' + 2c_{34}z' + c_{44} = 0, \quad (**)$$

где матрица

$$C = \|c_{ij}\|, c_{ij} = c_{ji}, i, j = 1, 2, 3,$$

связана с матрицей  $A = \|a_{ij}\|, i, j = 1, 2, 3$  следующим образом:

$$C = BAB',$$

и при подходящем выборе ортогональной матрицы  $B$  коэффициенты  $c_{ij}, i \neq j, i, j = 1, 2, 3$ , равны нулю.

а) Если при этом  $c_{11}, c_{22}, c_{33} \neq 0$ , то после параллельного переноса осей координат уравнение (\*\*) примет канонический вид:  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \lambda_4 = 0$  и определит *эллипсоид* (действительный или мнимый), *гиперболоид* (одноплостный или двуплостный), *конус* (действительный или мнимый).

б) Если только одно из чисел  $c_{11}, c_{22}, c_{33}$  равно нулю (пусть  $c_{33} = 0$ ), то уравнение (\*\*) может быть сведено к виду:  $c_{11}x''^2 + c_{22}y''^2 + 2\lambda z'' = 0, \lambda \neq 0$  или

к виду:  $c_{11}x'^2 + c_{22}y'^2 + \lambda = 0$ . Первый вариант задает эллиптический или гиперболический *параболоид*, во втором случае получается *цилиндр* (действительный или мнимый эллиптический или гиперболический).

в) Если ровно два числа из трех  $c_{11}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{33}$  равны нулю (пусть  $c_{22} = 0$ ,  $c_{33} = 0$ ), то уравнение (\*\*) может быть сведено к виду:

$$c_{11}x'^2 + 2\lambda y'' + 2\mu z'' = 0,$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  одновременно не равны нулю, или к виду:  $c_{11}x'^2 + \mu = 0$ . Первый вариант задает параболический цилиндр, во втором случае при  $\mu \neq 0$  получается пара параллельных плоскостей (действительных или мнимых) и при  $\mu = 0$  — пара совпадающих плоскостей.

Свойства П. в. п., а также описанный выше способ приведения уравнения П. в. п. к *каноническому* виду используются во многих математических теориях, например в исследованиях особых точек поверхностей, в приведении уравнений в частных производных к простейшему виду и др.

Лит.: [3, 69].

**ПОВЕРХНОСТЬ УРОВНЯ** функции  $u = f(P)$ , заданной на множестве  $D$ , — множество точек  $P \in D$  таких, что  $f(P) = C$ , где  $C$  — фиксированная постоянная; название П. у. в этом случае уточняется так: П. у.  $C$ . Множество  $D$  разбивается на непересекающиеся подмножества П. у. функции  $u = f(P)$ , соответствующие различным уровням.

Часто рассматривают П. у. функции двух, трех или нескольких переменных в области  $D$ , принадлежащей евклидову пространству соответствующей размерности. Справедлива теорема: градиент функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в точке  $P$  ортогонален П. у., проходящей через точку  $P$ .

**П р и м е р ы.** 1)  $u = x^2 + y^2 - z$ ; П. у. этой функции являются параболами вращения с осью  $Oz$  и вершинами, лежащими на оси  $Oz$  (рис. 58); 2)  $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ ; П. у. этой функции являются сферами с центрами в начале координат и радиусами от 0 до 1 или пустым множеством (рис. 59).

Лит.: [87].

**ПОВОРОТ** (вращение): 1°. П. плоскости вокруг точки  $O$  — такое *перемещение* (изометрия) плоскости, при котором точка  $O$  отображается сама на себя, а угол

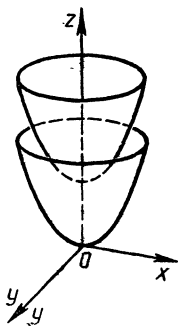


Рис. 58

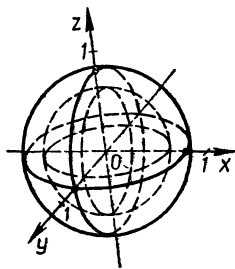


Рис. 59

между лучом  $OM$  и соответствующим ему лучом  $OM'$  имеет одну и ту же величину  $\alpha$ . Точка  $O$  при этом называется центром П., а величина угла  $\alpha$  называется углом П. (иногда и угол  $MOM'$  также называют углом П.). П. вокруг центра  $O$  на  $180^\circ$  называется центральной симметрией плоскости с центром  $O$ .

П. п. в т.  $O$  на угол  $\alpha$  обозначается так:  $R_\alpha^O$ , а центральная симметрия с центром  $O$  обозначается так:  $Z_O$ , или  $R_{180^\circ}^O$ , или  $S_O$ . Впрочем, возможны и другие обозначения. Множество П. п. в т.  $O$  составляет группу, точнее, коммутативную группу.

2°. П. пространства вокруг прямой  $l$  — такое перемещение пространства, при котором точки прямой  $l$  отображаются сами на себя (остаются неподвижными), а в каждой плоскости, перпендикулярной прямой  $l$ , происходит поворот на угол  $\alpha$  вокруг точки пересечения этой плоскости с прямой  $l$ . Прямая  $l$  при этом называется осью П., а иногда и осью вращения, угол  $\alpha$  (или его величина) — углом П., а иногда углом вращения. Обозначение П. п. в. п.  $l$ :  $R_\alpha^l$  П. п. в. п.  $l$  на угол в  $180^\circ$  называется осевой симметрией пространства. Множество П. п. в. п.  $l$  составляет группу.

См. также: *Виктовое перемещение, Параллельный перенос, Фигура вращения, Тело вращения.*

3°. Поворот (вращение) общего вида — любое движение (изометрия), имеющее неподвижную точку.

**ПОГРЕШНОСТЬ:** 1°. П. абсолютная данного числа  $F$  (выражения, формулы и т. д.), которое рассматривается как приближенное значение другого числа  $f$  (формулы, выражения  $f$ ), есть модуль разности  $|F - f|$ . Точность приближенного равенства  $F \approx f$  характеризуют границей абсолютной П.  $\Delta F \geq |f - F|$ . Чем меньше  $\Delta F$ , тем лучшим приближением является  $F$  для  $f$ . Если абсолютная граница П. равна  $\Delta F$ , то говорят, что  $f$  равно  $F$  с точностью до  $\Delta F$ , и записывают:  $f = F \pm \Delta F$ , что равносильно двойному неравенству  $F - \Delta F \leq f \leq F + \Delta F$ . Иногда определяют П. а. несколько иначе. Если  $x$  — точное значение некоторой величины, а число  $a$  — приближенное значение числа  $x$  (с избытком или с недостатком), то вводят такое определение П. а.: модуль разности точного и приближенного значений величины называется абсолютной погрешностью приближения. Если при этом П. а. не превосходит числа  $h$ , т. е. имеет место условие:  $|x - a| \leq h$ , то число  $a$  называют приближенным значением числа  $x$  с точностью до  $h$ . Если точность приближения одного числа другим характеризуется П. а., то качество приближения (вычисления, измерения) характеризуется относительной погрешностью.

2°. П. относительная определяется как отношение абсолютной П. приближенного числа  $F$  к модулю самого числа  $F$ , т. е. П. о. есть дробь  $\frac{\Delta F}{|F|}$ . П. о. обычно выражается в %:  $(\Delta F : |F|) \cdot 100\% = P\%$ , и говорят, что число  $f$  известно с точностью до  $P\%$  или  $f = F \pm P\%$ .

Иногда дают П. о. и такое определение: отношение абсолютной погрешности приближения к модулю приближенного значения величины называется относительной погрешностью приближения.



Понятие П. широко используется при округлении чисел, в приближенных формулах, при замене функций рядами.

См. также: *Приближенное интегрирование, Последовательных приближений метод, Парабол формула, Прямоугольников формула, Трапеций формула.*

**ПОДАЛГЕБРА** универсальной алгебры — подсистема  $N$  алгебраической системы  $M$ , если  $M$  является универсальной алгеброй.

Лит.: [55].

**ПОДГРУППА** группы  $G$  — подмножество  $H$  элементов группы, замкнутое относительно операций группы, т. е. если  $h_1 \in H$  и  $h_2 \in H$ , то  $h_1 h_2 \in H$ , если  $h \in H$ , то  $h^{-1} \in H$ .

**Пример.** Группа *ортогональных матриц* есть П. группы *неособенных матриц*; мультипликативная группа рациональных чисел (исключая нуль) есть П. мультипликативной группы всех действительных чисел, исключая нуль.

Лит.: [37].

**ПОДКОЛЬЦО** кольца  $R$ . Если кольцо  $R$  рассматривать как универсальную алгебру с двумя бинарными операциями « $+$ » и « $\cdot$ » (сложения и умножения) и одной унарной операцией « $\rightarrow$ » (взятия противоположного элемента), то любая *подалгебра* этой универсальной алгебры  $R$  будет ее П. Более распространенное определение П. кольца  $R$ : непустое подмножество  $R_1 \subset R$  такое, что если  $r_1, r_2 \in R_1$ , то  $r_1 + r_2, r_1 r_2 \in R_1$ .

**Примеры:** 1. В кольце  $\mathbb{Z}$  целых чисел множество всех чисел, кратных некоторому *простому числу*  $p$ , образует П.

2. В кольце всех квадратных матриц порядка  $n$  с элементами из некоторого кольца  $R$  множество всех матриц с *определителем*, равным 1, образует П. *унимодулярных матриц*.

3. В кольце функций, определенных на отрезке  $[a; b]$ , множество всех функций, *непрерывных* на этом отрезке, образует П.

Лит.: [48].

**ПОДМНОЖЕСТВО.** Если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ , то множество  $A$  называется П. множества  $B$  (символически это обозначается *включения знаком*  $A \subset B$  или  $B \supset A$ ). Например, множество всех положительных четных чисел является П. множества всех натуральных чисел, которое в свою очередь является П. множества всех целых чисел, и т. д. *Пустое множество* является П. всякого множества. Множество всех П. произвольного множества  $M$  имеет *мощность* большую, чем мощность множества  $M$  (Г. Кантор). Среди П. данного множества различают *собственные* (истинные) и *несобственные* П.

Лит.: [46].

**ПОДОБИЕ** — см. *Подобия преобразование*.

**ПОДОБИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ** плоскости (пространства) — отображение плоскости (пространства) на себя, при котором все расстояния между точками изменяются в одном и том же отношении  $k > 0$ . П. п. плоскости (пространства) часто называется короче: *подобием*. Положительное число  $k$  называется коэффициентом П. п.

Перемещение плоскости есть частный случай П. п., когда коэффициент подобия  $k = 1$ . Всякое П. п. есть композиция *гомотетии* и *перемещения*; верно и

обратное предложение: композиция гомотетии и перемещения есть П. п. Множество всех подобий плоскости образует *группу*, так как композиция любых двух П. п. есть также П. п. плоскости (пространства); для всякого П. п. существует обратное П. п.; существует единичный элемент (тождественное преобразование), и свойство ассоциативности П. п. выполняется всегда. Следовательно, выполняются все аксиомы *группы*. В силу определения П. п. всякий отрезок  $AB$  переходит в отрезок  $A'B'$ , длина которого  $|A'B'| = |AB| \cdot k$ ,  $k \neq 0$ . П. п. есть частный случай *аффинного преобразования*.

П. п. тесно связано с аксиомой *параллельных прямых*, которая эквивалентна (вместе с другими аксиомами) существованию хотя бы одной пары подобных и неконгруэнтных треугольников. П. п. широко используется при решении задач на построение в школьном курсе геометрии и в курсе геометрии педагогического института, при изготовлении подобных моделей и чертежей (подобное копирование).

«Метод подобия» при решении геометрических задач на построение заключается в следующем. Пусть даны некоторые элементы фигуры: величины углов или сами углы, линейные ее элементы (отрезки или их длины, а может быть, сумма некоторых линейных элементов) и, возможно, отношения некоторых линейных элементов, т. е. одни данные определяют форму искомой фигуры, а другие — линейные — определяют ее размеры. Тогда, используя углы (или их величины) или отношения линейных элементов, а может быть, углы и отношения линейных элементов, строят фигуру, подобную искомой, а затем подвергают П. п. построенную фигуру, выбрав коэффициент подобия  $k$  равным отношению соответствующих линейных элементов, и получают искомую фигуру.

Так, пусть требуется построить треугольник по двум углам  $A$  и  $B$  и периметру  $2p$ . Тогда строим вспомогательный треугольник  $A'B'C'$  по двум углам  $A'$  и  $B'$ , соответственно конгруэнтным данным углам  $A$  и  $B$ ; треугольник  $A'B'C'$  подобен искомому; найдя его периметр  $2p'$ , определим коэффициент подобия  $k = 2p : 2p'$ . Затем находим длины сторон искомого треугольника:  $|AB| = |A'B'| \cdot k$ ,  $|AC| = |A'C'| \cdot k$ ,  $|BC| = |B'C'| \cdot k$  и по этим сторонам строим искомый треугольник  $ABC$ . Можно, конечно, несколько варьировать построение искомого треугольника  $ABC$ ; например, найдя коэффициент  $k$  и приняв любую вершину вспомогательного треугольника  $A'B'C'$  за центр гомотетии, строим искомый треугольник  $ABC$ , гомотетичный, а следовательно, подобный треугольнику  $A'B'C'$ .

См. также: *Гомотетия, Геометрические построения, Пантограф, Подобные фигуры, Преобразование*.

**ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ** — две фигуры, соответственные в *преобразовании подобия*. Если фигуру  $\Phi$  можно отобразить на фигуру  $\Phi'$  так, что для любых двух точек  $A$  и  $B$  первой фигуры отношение расстояния между их образами  $|A'B'|$  к расстоянию  $|AB|$  между самими точками  $A$  и  $B$  равно одному и тому же числу  $k > 0$ , то фигура  $\Phi'$  подобна фигуре  $\Phi$  с коэффициентом подобия  $k$ .

Обозначается П. ф. знаком  $\sim$ . Если хотят записать П. ф.  $\Phi$  и  $\Phi'$  символически, то пишут:  $\Phi \sim \Phi'$ ; если при этом хотят еще подчеркнуть П. ф. с коэффициентом  $k$ , то пишут:  $\Phi \overset{k}{\sim} \Phi'$ , например:  $\triangle ABC \overset{3}{\sim} \triangle A'B'C'$ , или  $\triangle ABC \overset{3}{\sim} \triangle A'B'C'$ , где  $k = 3$ . У П. ф. соответственные элементы пропорциональны, а со-

ответственные углы конгруэнтны, т. е. величины их равны. Свойства П. ф.: 1) всякая фигура подобна самой себе с коэффициентом подобия  $k = 1$ ; 2) если фигура  $\Phi_1$  подобна фигуре  $\Phi$  с коэффициентом подобия  $k$ , то фигура  $\Phi$  подобна фигуре  $\Phi_1$  с коэффициентом подобия  $k' = 1 : k$ , т. е.  $\Phi_1 \overset{k}{\sim} \Phi \Leftrightarrow \Phi \overset{1/k}{\sim} \Phi_1$ ; 3) если фигура  $\Phi_2 \overset{k_2}{\sim} \Phi_1$ , а фигура  $\Phi_1 \overset{k_1}{\sim} \Phi$ , то фигура  $\Phi_2 \overset{k_1 k_2}{\sim} \Phi$ , т. е. фигура  $\Phi_2$  подобна фигуре  $\Phi$  с коэффициентом подобия  $k = k_1 k_2$ . Конгруэнтные фигуры подобны с коэффициентом подобия  $k = 1$ . Таким образом, отношение подобия на множестве фигур на плоскости (или в пространстве) является отношением эквивалентности. П. ф., как и их конгруэнтность, рефлексивно, симметрично и транзитивно. Для П. ф. имеет место следующее утверждение: если две фигуры подобны, то существует третья фигура, отличная от них, гомотетичная одной из них и конгруэнтная второй.

При изучении *планиметрии* важное значение имеют признаки подобия треугольников: а) по двум углам, б) по двум сторонам и углу между ними, в) по трем сторонам; более подробно эти признаки формулируются так: а) если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны; б) если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами равны, то эти треугольники подобны; в) если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Все правильные  $n$ -угольники при одном и том же  $n$  подобны; например, любые два квадрата, два равносторонних треугольника подобны (аналогично любые два выпуклых правильных  $n$ -гранника также подобны); любые две окружности также подобны, как и любые две сферы в пространстве.

Отношение площадей П. ф. равно квадрату коэффициента подобия, а отношение объемов П. ф. в пространстве равно кубу коэффициента подобия. П. ф. на плоскости строятся с помощью *пантографа*. Знак П. ф. представляет собой повернутую первую букву *S* латинского слова *similis* — подобный. С наглядной точки зрения П. ф. имеют одинаковую форму и, вообще говоря, различные размеры. В «Началах» Евклида П. ф. и преобразованиям подобия посвящена VI книга.

См. также: *Гомотетия, Перемещение, Конгруэнтность, Математические знаки*.

**ПОДОБНЫЕ ЧЛЕНЫ** многочлена — два члена многочлена:

$$Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \text{ и } Bx_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n},$$

где  $A$  и  $B$  — любые числа и  $\alpha_i = \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), т. е. степени обоих членов относительно каждой переменной (каждого аргумента)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  равны. Если коэффициент  $A$  при некотором члене многочлена равен нулю, то такой член считается подобным любому другому члену.

**ПОДПОЛЕ** поля  $P$  — подмножество  $Q \subset P$ , содержащее более одного элемента и такое, что если  $a, b \in Q$ , то  $a+b, -a, ab, a^{-1}$  ( $a \neq 0$ )  $\in Q$ . П. не является частным случаем понятия *подалгебры* универсальной алгебры, так как поле не является

универсальной алгеброй, потому что операция взятия обратного элемента  $a^{-1}$  определена не для любого  $a \in P$ , а именно  $0^{-1}$  не определен.

В поле комплексных чисел  $C$  множество всех действительных чисел  $R$  составляет подполе. Поле рациональных чисел  $Q$  является П. как в  $R$ , так и в  $C$ . Множество всех целых чисел составляет подкольцо  $Z$  в поле  $Q$ , но П. в нем не образует, так как не является полем.

Лит.: [15].

**ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ** — бесконечное подмножество множества элементов *последовательности*, упорядоченное согласно порядку последовательности. Справедливо утверждение: если последовательность имеет *предел*, то каждая подпоследовательность имеет тот же предел.

Лит.: [87].

**ПОДСИСТЕМА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**  $\mathfrak{M} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P \rangle$  — непустое подмножество  $A_1 \subset A$ , в котором определены операции  $F_\xi^*$  и предикаты  $P_\xi^*$ , значения которых на  $A$  совпадают с соответствующими значениями  $F_\xi \in \Omega_F$  и  $P_\xi \in \Omega_P$  на  $A$  и результат операций  $F_\xi^*$  над элементами из  $A_1$  вновь принадлежит к  $A_1$ . Частными случаями П. а. с. являются подмодель, *подалгебра* универсальной алгебры, *подгруппа*, *подкольцо* и т. д.

См. также *Подполе*.

Лит.: [55].

**ПОДСТАНОВКА**  $n$ -й степени — взаимно-однозначное отображение множества из  $n$  символов (как правило, берутся первые  $n$  натуральных чисел 1, 2, ..., ...,  $n$ ) на себя. Число всех различных П.  $n$ -й степени равно  $n!$  Относительно операции *умножения* П. множество всех П. образует симметрическую группу.

Пример: подстановка 5-й степени:  $\begin{pmatrix} 12345 \\ 25431 \end{pmatrix}$ .

**ПОДХОДЯЩАЯ ДРОБЬ.** — см. *Непрерывная дробь*.

**ПОЗИЦИОННАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ** — система счисления, основанная на принципе позиционного, или поместного, значения цифр, т. е. на том, что одна и та же цифра получает различные числовые значения в зависимости от ее места в записи числа. К П. с. с. относится широко распространенная ныне десятичная система, а также двоичная, восьмеричная и шестидесятеричная системы счисления. Двоичная система счисления находит большое применение в электронно-вычислительной технике (машинной математике).

Первой П. с. с. в истории развития математики была шестидесятеричная система древних вавилонян, возникшая за 2000 лет до н. э. В этой системе основанием было число 60, позиционный принцип еще не был в ней доведен до совершенства — отсутствовал символ нуля, из-за чего позиционная запись не имела завершенного характера. Следы этой системы сохранились до наших дней: 1 ч делится на 60 мин, 1 мин — на 60 с, окружность делится на 360 частей — дуговых градусов.

Независимо друг от друга П. с. с. возникли у племени майя в начале новой эры и в Индии в VIII—IX вв. Источником современной десятичной нумерации чисел была индусская система счисления; она имела основанием число 10, и в ней был символ для обозначения нуля. Принцип поместного значения распространился из Индии в другие страны. К народам Европы изображение цифр и позицион-

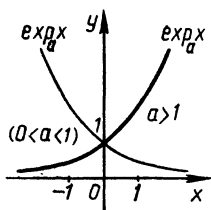


Рис. 60

ный способ обозначения чисел перешли из Испании, куда они дошли из Индии через мавританские государства Передней Азии.

В книге, изданной русской типографией, индусская нумерация впервые встречается в 1638 г. В 1647 г. в Москве была издана книга «Учение и хитрость ратного строения пехотных людей», в которой все цифры были уже индусскими. В знаменитой книге «Арифметика» Л. Магницкого, напечатанной в 1703 г. в Москве, по которой учился и М. В. Ломоносов, все вычисления в тексте делаются с числами в индусской записи.

См. также: *Нумерация, Система счисления, Счисление, Основание позиционной системы счисления, Непозиционная система счисления, Римские цифры.*

**ПОКАЗАТЕЛЬ СТЕПЕНИ** — см. в термине *Степень*.

**ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ** с основанием  $a > 0$  — функция, заданная формулой  $y = a^x$  ( $R \rightarrow R$ ). Часто П. ф. с основанием  $a > 0$  обозначают так:  $\exp_a$ , как сокращение от латинского слова *exponenta*.

При  $a = 1$  значение функции при всяком  $x$  равно 1, т. е.  $\exp_1(x) = 1^x = 1$ . П. ф. с основанием  $a = 1$  представляет собой тривиальный случай и почти не рассматривается. Область определения показательной функции — вся числовая прямая  $R$ , множество значения  $f(R)$  — бесконечный промежуток  $R^{>0} = ]0; \infty[$ , открытый числовой луч. Отметим свойства П. ф.: 1)  $\exp_a(1) = a$ ; 2)  $\exp_a(x) > 0$  при любом  $x \in R$ ; 3) при любых действительных  $x$  и  $y$  имеет место соотношение

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y); \quad (*)$$

4) при  $a > 1$  П. ф. строго возрастает на всей числовой прямой, а при  $0 < a < 1$  строго убывает (рис. 60); 5) П. ф. непрерывна в каждой точке области определения; 6) П. ф.  $\exp_a: R \rightarrow R^{>0}$  ( $a \neq 1$ ) имеет обратную функцию (здесь  $R^{>0}$  есть положительная полупрямая, множество значений ее — вся числовая прямая  $R$ ). Обратная функция к  $\exp_a: R \rightarrow R^{>0}$  ( $a \neq 1$ ) называется *логарифмической функцией* при основании  $a$  и обозначается  $\log_a$ .

При  $a = e$  ( $e$  — число)  $\exp_e$  обозначается проще:  $\exp$ .  $\exp$  — функция, задаваемая формулой  $y = e^x$ . Ряд процессов в природе (радиоактивный распад, рост численности бактерий в некоторый промежуток времени, падение атмосферного давления с возрастанием высоты над уровнем моря и др.) описывается П. ф. с основанием  $a \neq 1$ .

Графики П. ф. с основаниями  $a$  и  $\frac{1}{a}$ :  $y = a^x$  и  $y = (1/a)^x$  симметрично расположены относительно оси  $Oy$ . П. ф.  $y = a^x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка:

$$y' = a^x \ln a; \quad y'' = a^x (\ln a)^2, \quad \dots, \quad y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$$

Если обозначить П. ф. через  $f(x) = a^x$ , то функциональное свойство (\*) можно записать в виде

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y); \quad (**)$$

этим свойством, значением  $f(1) = a$  и непрерывностью П. ф. определяется вполне

однозначно. Другими словами, единственной функцией, определенной и непрерывной на всей числовой оси  $\mathbf{R}$  и удовлетворяющей условию (\*\*), является П. ф. Формула  $y = a^x$  дает решение функционального уравнения (\*\*) в непрерывных функциях при условии  $f(1) = a$ . П. ф.  $y = e^x$  представляется равномерно и абсолютно сходящимся рядом:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Если заменить в этом ряде действительную (вещественную) переменную  $x$  комплексной переменной  $z = x + iy$ , то получим сходящийся ряд  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ .

Его сумму принимают по определению за значение П. ф.  $e^z$  ( $\exp z$ ) при любом комплексном значении  $z$ . Функция  $\exp: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  определена и непрерывна вместе со всеми своими производными и удовлетворяет условию (\*\*). При чисто мнимом показателе имеем соотношение

$$e^{iy} = \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} \right) + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos y + i \sin y,$$

впервые полученное Эйлером. Так, например:

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1, \quad e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z,$$

т. е. П. ф. комплексной переменной оказывается *периодической* с чисто мнимым периодом  $2\pi i$  ( $2\pi i \cdot k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ); других периодов у нее нет.

П. ф. также связана с *гиперболическими функциями* соотношениями:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

П. ф. комплексного аргумента  $e^z$  имеет производную  $(e^z)' = e^z$ . Основное свойство П. ф. (\*) или (\*\*) действительного аргумента справедливо и для комплексного аргумента, в более простой форме его можно записать так:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

П. ф. иначе называется *экспоненциальной* или *экспонентой*.

Лит.: [56, 73].

**ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ** — уравнения, в которых неизвестное (переменная) содержится в показателе степени. В средней школе обычно рассматриваются П. у. только в области действительных чисел  $\mathbf{R}$ .

**Способы решения П. у.:** логарифмирование обеих частей уравнения; замена переменных (введение новых переменных); уравнивание степеней с равными основаниями; графические (приближенные) способы и другие способы.

**Примеры.** 1.  $2^x = 3^x$ . Логарифмируя обе части уравнения и перенося все члены влево, после преобразований получим:  $x(\lg 3 - \lg 2) = 0$ , откуда  $x = 0$ . Данное П. у. можно решить и делением обеих частей уравнения на степень  $3^x \neq 0$ . Тогда получим  $(2/3)^x = 1$ , следовательно,  $x = 0$ .

Решение данного П. у. усматривается и из графиков функций  $y = 2^x$  и  $y = 3^x$ , которые пересекаются в точке  $A(0; 1)$ , поэтому корень уравнения есть  $x = 0$ , и других корней нет в силу свойств *показательной функции*.

2.  $9^x + 15^x = 25^x$ . Это П. у. решается путем деления обеих частей уравнения на любую степень, входящую в уравнение, и дальнейшей заменой переменных; данное уравнение сводится к квадратному.

3.  $2^x = -4$ . Это уравнение не имеет решений (множество решений — пустое множество), так как левая часть уравнения при любом действительном значении  $x$  — число положительное, а правая — отрицательное.

Иногда рассматриваются уравнения, которые содержат не только показательные, но и другие функции, например:  $3\lg x = 1$  или  $\log_{1/16} x = (1/16)^x$ ; такие уравнения уже нельзя отнести к показательным; первое из них называют показательно-тригонометрическим, а второе — показательно-логарифмическим. П. у. являются частным случаем *трансцендентных уравнений*.

См. также: *Логарифмическое уравнение, Тригонометрические уравнения, Уравнение, Диофантовы уравнения, Функциональное уравнение.*

**ПОКРЫТИЕ МНОЖЕСТВА** — совокупность  $G$  точечных подмножеств, таких, что каждая точка данного множества  $A$  принадлежит по крайней мере одному множеству покрытия. Если множества покрытия — *открытые множества*, то само П. м. также называется открытым. Важным утверждением дифференциального исчисления является лемма Гейне—Бореля: из всякого открытого П. м.  $G$  для ограниченного замкнутого множества  $A$  можно выделить конечное П. м., т. е. П. м., состоящего из конечного числа множеств:  $G_1, G_2, \dots, G_n$ . Лемму Гейне—Бореля часто называют теоремой Бореля—Лебега.

Понятие покрытия множества применяется в некоторых определениях *размерности* множества.

Лит.: [4, 46].

**ПОЛЕ** — ассоциативно-коммутативное кольцо  $P$  с единицей, которое состоит не только из 0 и в котором каждый отличный от 0 элемент является обратимым. В П. выполнимо, и притом однозначно, деление, т. е. для любых элементов  $a$  и  $b$  ( $b \neq 0$ ) из  $P$  существует в  $P$  элемент  $q$ , притом единственный, такой, что  $bq = a$ . Этот элемент  $q$  называется частным элементом  $a$  и  $b$  и обозначается символом  $q = a/b$ .

П., изоморфное подполю поля комплексных чисел  $C$ , называется числовым. Кольца рациональных чисел, действительных чисел, комплексных чисел являются П., но кольцо целых чисел  $Z$  П. уже не является, так как частное двух целых чисел может и не быть целым числом. П. рациональных чисел содержится во всяком числовом П. Примером числового П. может служить также система чисел вида  $a + b\sqrt{2}$  с любыми рациональными  $a$  и  $b$ . Действительно, частное

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}$$

является числом того же вида. При этом предполагалось, конечно, что  $c + d\sqrt{2}$ , а следовательно, и  $c - d\sqrt{2}$  отличны от 0.

П. является и множество всех рациональных функций с действительными коэффициентами. Кольцо же многочленов с коэффициентами из некоторого числового

П. не является П., так как многочлены могут не делиться без остатка. Во всяком П. всякое равенство можно сокращать на общий, отличный от нуля множитель. Если все целые, кратные единицы поля  $P$  являются различными элементами поля  $P$  (т. е.  $k \cdot 1 \neq l \cdot 1$ , если  $k \neq l$ ), то говорят, что П. имеет характеристику 0 (или  $\infty$ , или есть поле без характеристики). Таковы все числовые П. Если при  $l \neq k$  все же имеем:  $l \cdot 1 = k \cdot 1$ , то  $(l - k) \cdot 1 = 0$ , т. е. в поле  $P$  существует такое положительное кратное единицы, которое равно нулю. Тогда  $P$  называют П. конечной характеристики. Для всякого П. имеет место один из двух случаев:

1) для всякого элемента  $a \neq 0$  и любого целого числа  $n \neq 0$  кратное  $na$  также входит в  $P$  и отлично от нуля;

2) существует единственное простое число, такое, что  $pa = 0$ , для любого элемента. Характеристикой П. называется в случае: 1) число 0 и в случае 2) число  $p$ .

При  $m \equiv 0 \pmod{p}$  конечного П. характеристики  $p$  может служить кольцо классов вычетов по простому модулю  $p$ . При  $p = 2$  это поле изоморфно полю из двух элементов 0 и 1 со сложением и умножением, задаваемыми таблицами:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

•	0	1
0	0	0
1	0	1

Лит.: [15].

**ПОЛЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ** — множество всех алгебраических чисел. П., а. ч. является алгебраически замкнутым полем. Этот факт легко доказывается с помощью основной теоремы о симметрических функциях.

**ПОЛИВЕКТОР** — контравариантный тензор, кососимметрический по всем своим индексам. П. валентности два есть бивектор; П. валентности три — тривектор; если валентность П. превосходит размерность исходного пространства, то П. есть тождественный нуль.

Понятие П. широко применяется в геометрии и топологии (метод внешних форм Э. Картана, теорема Де Рама о когомологиях компактного многообразия).

Лит.: [72].

**ПОЛИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА** — числовая функция  $F$  векторных аргументов  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ , линейная по каждому из них, т. е.

$$y = F(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k), \quad \vec{x}_i \in L, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

где  $L$  — линейное пространство,  $y$  — вещественное или комплексное число, причем выполняется следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & F(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{l-1}, \alpha \vec{x}_l' + \beta \vec{x}_l'', \vec{x}_{l+1}, \dots, \vec{x}_k) = \\ &= \alpha F(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{l-1}, \vec{x}_l', \vec{x}_{l+1}, \dots, \vec{x}_k) + \beta F(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{l-1}, \vec{x}_l'', \vec{x}_{l+1}, \dots, \vec{x}_k) \end{aligned}$$

для любых  $\vec{x}_i', \vec{x}_i'' \in L$  и любых двух чисел  $\alpha, \beta$  из основного поля (или ассоциативно-коммутативного кольца).



П. ф. является ковариантным тензором валентности  $k$ . Рассматривают также П. ф., у которых векторные аргументы принадлежат разным линейным (векторным) пространствам и даже модулям (в последнем случае векторные аргументы принадлежат линейным пространствам или модулям над одним и тем же ассоциативно-коммутативным кольцом).

Частными случаями П. ф. являются линейная форма  $k = 1$ , билинейная форма  $k = 2$ , трilinearная форма  $k = 3$  и др.

Лит.: [72, 79].

**ПОЛИНОМ** — то же, что и *многочлен*. Термин употребляется в настоящее время значительно реже, чем термин «многочлен».

См. также: *Целая рациональная функция, Бином*.

Греч. πολύ — много и μέρος — область, часть, член.

**ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА** — обобщение формулы *бинома Ньютона* на случай возведения в натуральную степень  $n$  суммы  $k$  слагаемых ( $k \geq 2$ );

$$\left( \sum_{i=1}^k x_i \right)^n = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n} A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}^{(n)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k},$$

где суммирование в правой части равенства распространено на всевозможные наборы целых неотрицательных чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , сумма которых равна  $n$ . Коэффициенты  $A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}^{(n)}$  носят название *полиномиальных* и выражаются следующим образом:

$$A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}^{(n)} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (\alpha_i!)}.$$

При  $k = 2$  полиномиальные коэффициенты становятся *биномиальными коэффициентами*.

См. также: *Комбинаторика, Размещение, Размещение с повторениями, Сочетание, Сочетание с повторениями, Перестановка с повторениями*.

**ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ** — см. *Полиномиальная теорема*.

**ПОЛИЭДР** — то же, что и *многогранник* в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R^n$ .

**ПОЛНАЯ КРИВИЗНА** поверхности в точке — то же, что *гауссова кривизна* поверхности в этой точке.

**ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ** от функции  $y = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ , зависящей от переменной  $t$  как непосредственно, так и через посредство аргументов  $x_i = x_i(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ , являющихся функциями от переменной  $t$ , п., выражается формулой

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k}{dt},$$

где  $\partial f / \partial t, \partial f / \partial x_k$  — частные производные (см. *Частная производная, Производная*).

Лит.: [87].

**ПОЛНАЯ СИСТЕМА АКСИОМ** — такая система непротиворечивых аксиом, любые две интерпретации которой изоморфны. П. с. а. достаточна для построения той или иной теории. Так, система аксиом трехмерной евклидовой геометрии,

геометрии Лобачевского, трехмерной проективной геометрии являются П. с. а. Однако система аксиом теории *групп* не является полной, так как существуют неизоморфные группы.

**ПОЛНАЯ СИСТЕМА ВЫЧЕТОВ** по модулю  $m$  — любая совокупность целых чисел, содержащая по одному числу из каждого класса чисел по модулю  $m$  (два целых числа  $a$  и  $b$  принадлежат одному классу по модулю  $m$ , если и только если  $a - b$  делится на  $m$ ). Любые  $m$  чисел, принадлежащие различным классам по модулю  $m$ , образуют П. с. в. В качестве П. с. в. может применяться система наименьших неотрицательных вычетов:  $0, 1, 2, \dots, m-1$  (см. *Вычеты*).

**ПОЛНАЯ СИСТЕМА ФУНКЦИЙ** в некотором линейном пространстве функций  $L$  — система функций  $\{f(x)\}$  такая, что в  $L$  не существует ненулевой функции, ортогональной всем функциям семейства (см. *Ортогональные функции*) в смысле определенного в  $L$  скалярного произведения. Если в  $L$  существует полная ортонормированная система функций, то любую функцию из  $L$  можно разложить в ряд по функциям этой системы.

**Пример.** Система  $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx, \cos nx\right\}, n \in N$  — ортонормированная П. с. ф. относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций на  $[-\pi; \pi]$ . Система функций, полная в одном пространстве, может оказаться неполной в другом.

**ПОЛНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ** (полная вариация) функции одного переменного — верхняя грань сумм  $\sum_{i=1}^{i=n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$  для всевозможных разбиений  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  отрезка  $[a; b]$ . Функции, имеющие ограниченное П. и., называются функциями с ограниченной вариацией. Последние обладают рядом интересных свойств.

Например, каждая функция ограниченной вариации является разностью двух ограниченных положительных неубывающих функций.

П. и. функции нескольких переменных также рассматривается, но определяется сложнее.

**ПОЛНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФИГУРЫ** — такое изображение фигуры, на котором определяются позиционные свойства ее оригинала, т. е. любая инцидентность двух элементов из множества точек, прямых и плоскостей на оригинале однозначно определяется на изображении. Если на оригинале (изображаемой фигуре) точка принадлежит прямой (инцидентна прямой), то и на П. и. ф. проекция точки принадлежит проекции прямой; если на оригинале прямая принадлежит некоторой плоскости, то и на П. и. ф. проекция прямой также принадлежит проекции плоскости и т. д.

Иногда П. и. ф. определяют через изображение  $\{0, E_1, E_2, E_3\}$  аффинного репера в параллельной *аксонометрии*: изображение  $F$  на плоскости  $\alpha$  фигуры  $F'$  называется полным, если к нему можно присоединить изображение аффинного репера  $\{0, E_1, E_2, E_3\}$  так, что все точки, принадлежащие фигуре  $F'$ , будут заданы на плоскости  $\alpha$ ; при этом точка  $M' \in F'$  считается заданной, если на плоскости изображений  $\alpha$  указаны ее аксонометрическая проекция  $M$  и одна из вторич-

ных проекций (на какую-либо координатную плоскость). Таким образом, П. и. ф. жестко связано с **аффинным репером** (базисом).

Лит.: [6, 92].

**ПОЛНОЕ ПРИРАЩЕНИЕ** функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — разность между  $f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n)$  и  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет непрерывные частные производные, то П. п. есть сумма полного дифференциала и величины, бесконечно малой по отношению к

$$\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}.$$

**ПОЛНОЕ ПРОСТРАНСТВО** — метрическое пространство, в котором всякая фундаментальная (сходящаяся в себе) последовательность имеет предельную точку, принадлежащую этому пространству. Например, евклидово пространство полно, круг с выколотым центром не является П. п.

**ПОЛНОТА СИСТЕМЫ АКСИОМ** — одно из основных требований (условий, свойств) *непротиворечивой системы аксиом*. См. *Полная система аксиом*.

**ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ**  $df$  функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — линейная функция по  $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ :

$$df(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n$$

в случае, когда она отличается от полного приращения на величину, бесконечно малую по сравнению с  $\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$ . Иначе, П. д. есть главная линейная часть *приращения функции*.

**ПОЛНЫЙ КВАДРАТ** двучлена — выражение  $ax^2 + bx + c$ , которое можно записать в виде  $(kx + l)^2$ . П. к. встречается при выводе формулы корней квадратного уравнения (квадратного трехчлена), при интегрировании некоторых функций, при изучении кривых второго порядка и т. д. П. к. иначе называют точным квадратом или квадратом двучлена. П. к. иногда называют также *натуральное число, равное квадрату другого натурального числа*.

См. также: *Тождество, Формула, Ньютона бином*.

**ПОЛНЫЙ УГОЛ** — угол, величина которого равна  $360^\circ$ . Множество точек П. у. заполняет всю плоскость; можно, допуская вольность, считать, что стороны такого угла совпадают.

**ПОЛНЫЙ ЧЕТЫРЕХВЕРШИННИК** в проективной геометрии — совокупность четырех точек (вершин П. ч.), из которых никакие три не лежат на одной прямой, и шести прямых (сторон П. ч.), определяемых каждой парой точек.

Если  $ABCD$  — П. ч., то его сторонами будут шесть прямых  $AB, BC, CD, DA, AC, BD$ . Стороны  $AB$  и  $CD$ ,  $BC$  и  $AD$ ,  $AC$  и  $BD$ , не имеющие общей вершины, называются *противоположными*. Точки пересечения противоположных сторон называются *диагональными точками* П. ч. Прямые, соединяющие диагональные точки, называются *диагоналями* П. ч.

На каждой стороне и диагонали П. ч. имеется *гармоническая четверка* точек. П. ч. используется при построении четвертой гармонической точки к трем данным точкам, принадлежащим одной прямой, пользуясь только одной линейкой.

Двойственной формой П. ч. является полный четырехсторонник, т. е. че-

тыре прямые (стороны П. ч.), из которых никакие три не проходят через одну точку, и шесть их точек пересечения (вершин П. ч.).

Полный четырехвершинник называют также полным четырехугольником.

См. также: *Двойственности принцип, Паскаля теорема, Брианшона теорема.*

**ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА** — выражение вида  $f = \sum_{i,k=1}^{i,n} a_{ik} x_i x_k$ , где  $a_{ik} = a_{ki}$ , принимающее положительные значения при всех действительных  $x_i$ , кроме  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

Ортогональным преобразованием переменных П. о. к. ф. приводится к виду:  $f = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i (x_i')^2$ , где все  $\lambda_i > 0$ . Линейными невырожденными преобразованиями (с действительными коэффициентами) П. о. к. ф. приводится в сумму квадратов:

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i'')^2,$$

т. е. к *нормальному виду*. Известен признак положительной определенности формы (см. *Сильвестра критерий*).

Форма вида  $g = \sum_{i,k=1}^{i,n} a_{ik} x_i \bar{x}_k$  (где чертой сверху обозначаются *комплексно-сопряженные числа*) и  $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$  такая, что  $g > 0$  при  $x$ , отличных от нуля, называется П. о. к. ф. Эрмита. Для нее справедливы теоремы, во многом схожие с вышеприведенными.

**ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА** — действительные числа, большие нуля; они расположены на *числовой прямой* справа от начала отсчета — нулевой точки. Так, числа 2, 3,  $\pi$ ,  $\sqrt{10}$ ,  $15/2$  и т. д. — примеры П. ч. Знак «+» перед П. ч. обычно не пишется. Обозначение:  $R^{>0}$  или  $R^+$ . Иногда ноль включают в множество положительных чисел. Тогда пишут:  $R^{>0}$ .

См. также: *Отрицательные числа, Математические знаки.*

**ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ИНДЕКС ИНЕРЦИИ** действительной *квадратичной формы* — число положительных квадратов в *нормальном виде* квадратичной формы. П. и. и. является *инвариантом* действительной квадратичной формы относительно ее невырожденных линейных преобразований.

**ПОЛОСА:** 1<sup>0</sup>. П. в *планиметрии* — непустое и отличное от полуплоскости пересечение двух полуплоскостей с различными параллельными границами — краями П. Иногда допускается и такое описательное определение П.: П. — множество точек плоскости, лежащих между двумя различными параллельными прямыми этой плоскости. Аналитически П. задается неравенствами:

$$a < Ax + By < b,$$

где  $a, b, A, B$  — постоянны,  $A$  и  $B$  не равны нулю одновременно, а  $x, y$  — декартовы координаты точек.

2<sup>0</sup>. П. в *дифференциальной геометрии* — кривая в трехмерном евклидовом пространстве, в каждой точке которой заданы три линейно независимых вектора, один из которых направлен по касательной.

Лит.: [61].

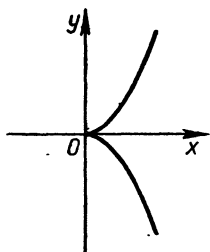


Рис. 61

**ПОЛУГРУППА** — *группоид* (магма), в котором умножение удовлетворяет закону *ассоциативности*. При дополнительном требовании существования и единственности решений уравнений  $ax = b$ ,  $ya = b$  при любых  $a$  и  $b$  П. становится *группой*.

Примером П. может служить множество всех матриц порядка  $n$  относительно матричного умножения.

Лит.: [48, 55].

**ПОЛУИНТЕРВАЛ** — множество точек *числовой прямой*  $R$ , удовлетворяющих условию:

$$a \leq x < b \text{ или } a < x \leq b. \quad (*)$$

П. не является ни открытым, ни замкнутым множеством на числовой прямой. Первый П. (\*) обозначается  $[a; b[$  или  $[a; b)$ , а второй П. обозначается  $]a; b]$  или  $(a; b]$ . П. иначе называется *полуоткрытым промежутком*, или *полуоткрытым интервалом*, или *полусегментом* с началом  $a$  и концом  $b$ ,  $a < b$ . Полуинтервал имеет смысл и при  $b = +\infty$  или  $a = -\infty$ .

**ПОЛУКУБИЧЕСКАЯ ПАРАБОЛА** — плоская кривая, уравнение которой в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:  $y^2 = kx^3$ ,  $k > 0$ . П. п. имеет точку заострения («клюв») в начале координат (рис. 61). Ось  $Ox$  является касательной к П. п. в начале координат. П. п. не является параболой. П. п. иначе называется *параболой Нейля*.

**ПОЛУЛОГАРИФИЧЕСКАЯ БУМАГА** — бумага с нанесенной на ней прямоугольной сеткой так, что по одной из координатных осей отложена равномерная шкала, а по другой — функционально-логарифмическая. П. б. используется для построения графиков некоторых функций.

См. также: *Логарифмическая бумага*.

**ПОЛУНЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ:** 1°. П. ф. *сверху* в точке  $x_0$  — функция  $f(x)$ , удовлетворяющая условию: для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что как только  $|x - x_0| < \delta$ , разность  $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ . Непрерывная функция является П. ф. сверху, но не наоборот.

2°. П. ф. *снизу* в точке  $x_0$  — функция  $f(x)$ , удовлетворяющая условию: для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что как только  $|x - x_0| < \delta$ , разность  $f(x_0) - f(x) < \varepsilon$ . Например, функция

$$y = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ 1 - x & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

полунепрерывна снизу в точке  $x_0 = 0$ . Относительно П. ф. справедлив ряд теорем, аналогичных теоремам о *непрерывных функциях*. Отметим, например, такую из них: П. ф. снизу на данном отрезке достигает минимума.

Лит.: [87].

**ПОЛУПЛОСКОСТЬ:** 1°. П. — каждое из двух непустых подмножеств множества точек плоскости, на которые разбивает его всякая прямая  $l$ , принадлежащая плоскости и не содержащая точек этих двух подмножеств: при этом любые точки, принадлежащие одному подмножеству, являются концами отрезка, не

пересекающего прямую  $l$ , а любые две точки, принадлежащие разным подмножествам, являются концами отрезка, пересекающего прямую  $l$ .

2°. П. с границей  $l$  — объединение открытой П. и ее границы  $l$ . Иногда дают определение П. менее строгое и полное, но более доходчивое: П. — одна из двух частей евклидовой плоскости, на которые разбивает эту плоскость всякая лежащая в ней прямая  $l$ . Если уравнение прямой  $l$  имеет вид:  $ax + by + c = 0$ , где  $a$  и  $b$  одновременно не равны нулю, то одну открытую П. с границей  $l$  можно определить как множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству  $ax + by + c > 0$ , а другую открытую П. с той же границей — как множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству  $ax + by + c < 0$ . Тогда замкнутую П. с границей  $l$ , т. е. П. в смысле 2°, можно определить такими неравенствами: первую — как множество точек, удовлетворяющих неравенству  $ax + by + c \geq 0$ , а вторую — как множество точек, удовлетворяющих неравенству  $ax + by + c \leq 0$ .

Для комплексной плоскости, рассматриваемой как множество точек  $z = x + iy$ , открытая верхняя П. определяется соотношением  $y = \text{Im } z > 0$  и нижняя П. — соотношением  $y = \text{Im } z < 0$ ; левая открытая П. определяется соотношением  $x = \text{Re } z < 0$  и правая открытая П. — соотношением  $x = \text{Re } z > 0$ .

**ПОЛУПОЛОСА** — открытое множество точек евклидовой плоскости, координаты которых удовлетворяют в прямоугольной декартовой системе координат следующим трем неравенствам:  $y < ax + b$ ,  $y > ax + c$ ,  $y > (-1/a)x + d$ , где  $c < b$ ,  $a \neq 0$ ; это одна из открытых П., и  $y < ax + b$ ,  $y > ax + c$ ,  $y < (-1/a)x + d$  — вторая открытая П. Если знаки строгого неравенства заменить знаками  $\geq$ ,  $\leq$ , то получим замкнутую П.

См. также: *Полуплоскость, Полупрямая, Луч, Полупространство*.

**ПОЛУПРОСТРАНСТВО**: 1°. П. открытое — множество точек евклидова пространства, координаты которых удовлетворяют одному из неравенств:  $ax + by + cz + d > 0$  или  $ax + by + cz + d < 0$ , где  $a, b, c$  не обращаются в 0 одновременно. Плоскость  $ax + by + cz + d = 0$  называется границей открытого П.

2°. П. замкнутое — множество точек евклидова пространства, координаты которых удовлетворяют одному из неравенств:  $ax + by + cz + d \geq 0$  или  $ax + by + cz + d \leq 0$  ( $a, b, c$  не обращаются в нуль одновременно). Сама плоскость  $ax + by + cz + d = 0$  называется границей замкнутого П. Иногда П. описательно определяют как одну из частей евклидова пространства, на которые разбивает его всякая плоскость.

**ПОЛУПРЯМАЯ** — синоним термина *Луч*.

**ПОЛЬКЕ—ШВАРЦА ТЕОРЕМА** — теорема, заключающаяся в следующем: три отрезка произвольной длины, лежащие в одной плоскости и исходящие из общей точки под произвольными углами друг к другу (величина которых отлична от  $0^\circ$  и  $180^\circ$ ), могут быть приняты за параллельную проекцию пространственного ортогонального репера  $O' \overset{\rightarrow}{e}_1 \overset{\rightarrow}{e}_2 \overset{\rightarrow}{e}_3$ .

Теорема П. — Ш. была впервые сформулирована немецким математиком К. Польке (1853) и имела сложное доказательство, а затем была обобщена и доказана более элементарным путем другим немецким математиком Г. Шварцем (1864).

П. — Ш. т. можно формулировать так: любой невырожденный четырехугольник с его диагоналями можно рассматривать как параллельную проекцию тетраэдра, подобного любому данному. П. — Ш. т. имеет большое практическое значение и является одной из основных теорем параллельной аксонометрии.

На основании этой теоремы можно любой четырехугольник с его диагоналями принять за изображение правильного тетраэдра.

См. также: *Проекция, Аффинная геометрия, Чертеж.*

Лит.: [95].

**ПОЛЯ ТЕОРИЯ** — раздел математики, изучающий гладкие скалярные, векторные, тензорные поля, а также поля геометрических объектов (см. *Поле, Тензорное исчисление*). П. т. возникла и в особенности развилась под влиянием новых идей физики, связанных, в частности, с теорией относительности Эйнштейна. При рассмотрении скалярных полей удобно вводить поверхности уровня (см. *Уровня поверхности*). Частные производные от функции скалярного поля по пространственным переменным (если они существуют) задают вектор-градиент скалярного поля:

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.$$

Этот вектор перпендикулярен к поверхностям уровня, направлен в сторону наибольшего возрастания функции  $u$ , и его длина равна производной от  $u$  в направлении градиента.

С каждым векторным полем связаны векторные линии — линии, касающиеся в каждой своей точке некоторого вектора поля. Например, силовые линии поля электрической напряженности суть векторные линии. Векторные линии задаются обычно системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{p_x} = \frac{dy}{p_y} = \frac{dz}{p_z},$$

где  $\vec{p} = \{p_x, p_y, p_z\}$  — вектор поля.

Специальные виды векторных полей имеют названия: 1) плоскопараллельное поле, в котором имеется направление такое, что производные от всех координат вектора по этому направлению равны нулю; задачи, связанные с таким полем, сводятся к плоским задачам; векторные линии такого поля — плоские кривые; 2) центральное поле, у которого все векторы лежат на прямых, пересекающихся в одной точке; 3) цилиндрическое поле, векторы которого лежат на прямых, ортогонально пересекающих некоторую фиксированную прямую, причем длина вектора поля зависит от расстояния точки до оси.

Много сведений о строении векторного поля в данной точке дают *дивергенция* (расхождение) и *вихрь* (*ротор*) поля. Интерпретируя векторное поле как поле скоростей, не зависящее от времени (стационарного) движения газа, можно увидеть физический смысл дивергенции и вихря. Некоторый объем газа через время  $\Delta t$  в первом приближении повернется на некоторый угол  $\varphi$  и претерпит сжатие (либо растяжение) по трем осям. Удвоенная угловая скорость вращения  $\omega$  вокруг оси  $l$  равна проекции ротора на орт  $\vec{l}$  оси  $l$ , а относительная скорость изменения величины объема  $v$  — дивергенция. В координатах они выражаются так:

$$\operatorname{rot} \vec{p} = \left\{ \frac{\partial p_z}{\partial y} - \frac{\partial p_y}{\partial z}, \frac{\partial p_x}{\partial z} - \frac{\partial p_z}{\partial x}, \frac{\partial p_y}{\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial y} \right\},$$

$$\operatorname{div} \vec{p} = \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z}.$$

Используя формальный вектор (*Набла оператор*):

$$\vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\},$$

эти формулы можно записать:

$$\operatorname{rot} \vec{p} = \vec{\nabla} \times \vec{p} \quad (\text{векторное произведение}),$$

$$\operatorname{div} \vec{p} = (\vec{\nabla} \vec{p}) \quad (\text{скалярное произведение}).$$

Потоком векторного поля через поверхность называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля и единичного вектора нормали к поверхности. Формула Остроградского (см. *Остроградского формула*) очень просто читается в терминах П. т.: поток векторного поля через поверхность равен интегралу дивергенции вектора по объему, ограниченному этой поверхностью:

$$\oint_{\Sigma} (\vec{p}, \vec{n}) dS = \int_V \operatorname{div} \vec{p} dv.$$

Циркуляцией векторного поля по замкнутому контуру называется интеграл по контуру скалярного произведения векторного поля на единичный касательный вектор к контуру.

Формула Стокса (см. *Стокса формула*) в таких терминах выражается следующим образом: циркуляция вектора по замкнутому контуру равна интегралу вихря поля по любой поверхности, ограниченной данным контуром, т. е.

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{\Sigma} (\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{a}) dS.$$

По вихрю и дивергенции векторные поля подразделяются на потенциальные ( $\operatorname{rot} \vec{p} = \vec{0}$ ), соленоидальные ( $\operatorname{div} \vec{p} = \vec{0}$ ) и лапласовы. Последние связаны с уравнением Лапласа (см. *Лапласа уравнение*), именно их потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Лит.: [94].

**ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ** точки на плоскости — два числа  $\rho$ ,  $\varphi$ , определяющие точку на плоскости в соответствии со следующими соглашениями. Пусть на плоскости выбрана некоторая точка  $O$ , называемая полюсом, и луч с началом в точке  $O$ , называемой полярной осью. При этих обстоятельствах каждой точке  $M$  можно сопоставить два числа:  $\rho$  — полярный радиус, равный длине отрезка  $OM$ , и  $\varphi$  — полярный угол, равный углу между полярной осью и лучом  $OM$ . При этом  $0 \leq \rho < \infty$ ;  $\rho = 0 \Leftrightarrow M = O$ ;  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . П. к.  $\varphi$  определены для всех точек плоскости, кроме точки  $O$  (рис. 62). Часто угол  $\varphi$  определяют не однозначно, а лишь с точностью до  $2\pi k$ .



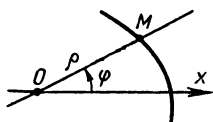


Рис. 62

Если на плоскости выбрать декартову систему координат так, чтобы начало этой системы совпало с точкой  $O$ , положительное направление оси  $x$  совпало с полярной осью, а положительное направление оси  $y$  состояло из точек, полярный угол которых равен  $\frac{\pi}{2}$ , то между декар-

товыми координатами  $x$ ,  $y$  и полярными координатами  $\rho$ ,  $\varphi$  произвольной точки имеет место связь, выражаемая формулами:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$y = \rho \sin \varphi, \quad \text{равенства однозначно определяют } \varphi.$$

Лит.: [87, 90].

**ПОПАРНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА** — целые числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ( $k \geq 2$ ) такие, что каждая пара из них  $a_i$  и  $a_j$  является *взаимно простыми числами*. Если числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$  суть П. п. ч., то они являются и взаимно простыми все вместе. Обратное неверно — числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$  могут быть взаимно простыми числами, но не быть П. п. ч. Например, числа 6, 10, 15 — взаимно простые числа, но они не являются П. п. ч.

**ПОРИЗМА** — верное предложение, высказанное в такой общей форме, которую можно всегда конкретизировать.

**П р и м е р ы П.** и соответствующих им теорем. 1. П.: произведение длин отрезков, образуемых касательной к гиперболе на ее асимптотах (считая от начала координат), есть величина постоянная. Теорема: произведение длин отрезков, образуемых касательной к гиперболе на ее асимптотах, равно сумме квадратов полуосей гиперболы.

2. П.: произведение длин двух отрезков — всей секущей (проведенной к окружности из внешней точки) на ее внешнюю часть — есть величина постоянная. Т е о р е м а: произведение длин двух отрезков — всей секущей (проведенной к окружности из внешней точки) на ее внешнюю часть — равно квадрату касательной, проведенной к окружности из той же точки.

П. встречаются у древних греков: у Евклида, Паппа, Прокла, а также у европейских математиков, достаточно часто у французского геометра Мишеля Шаля (1793—1880), тонкого знатока истории математики, написавшего интересную книгу о греческой и современной ему геометрии «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов» (1883).

Греч.  $\lambda\omicron\rho\iota\zeta\omega$  — открываю путь, нахожу.

**ПОРЯДКОВОЕ ЧИСЛО** — тип вполне упорядоченного множества. Пример П. ч. — число 0 — тип пустого множества. Над П. ч. определяются арифметические операции сложения, умножения, вычитания и деления. П. ч. были введены Г. Кантором. П. ч. называют также *ординальными числами*.

См. также: *Трансфинитные числа, Кардинальное число*.

**ПОРЯДОК** (или *отношение порядка*) на множестве  $A$  — важное *бинарное отношение* на  $A$  наряду с отношением эквивалентности и функциональным отношением (функцией). Для обозначения П. на множестве чаще всего используют

знаки:  $R$ ,  $<$ ,  $\leq$ ,  $\approx$ ,  $>$  (читается: отношение «эр», меньше, меньше или равно, предшествует, следует за).

П. на множестве  $A$  — бинарное отношение на  $A$ , если оно *транзитивно* и *антисимметрично* (иногда пишут асимметрично). П. (или отношение П.)  $R$  на  $A$  называют нестрогим, если  $R$  рефлексивно на  $A$ :  $\forall a \in A \ aRa$ . Отношение П.  $R$  называют строгим на  $A$ , если оно антирефлексивно:  $\forall a \in A \neg aRa$ . Из антирефлексивности транзитивного отношения  $R$  следует его антисимметричность. По этому понятию отношения строгого П. можно дать эквивалентное о п р е д е л е н и е: бинарное отношение  $R$  на множестве  $A$  называется строгим порядком на  $A$ , если оно транзитивно и антирефлексивно на  $A$ .

П р и м е р ы. -1. Отношения  $<$  и  $\leq$  на множестве действительных чисел являются соответственно строгим П. и нестрогим П.

2. Отношение делимости на множестве натуральных чисел есть отношение нестрогого порядка.

Отношение П. на множестве  $A$  называется отношением линейного П. или линейным П. (совершенным П.), если это отношение связано на  $A$ :  $A \setminus \{a, b \in A\} \ a \neq b \Rightarrow aRb \vee bRa$ . Отношение П., не являющееся линейным, обычно называют отношением частичного П. или частичным П.

П р и м е р. Отношение  $\subset$  — включения во множестве всех подмножеств множества  $A$  — отношение нестрогого П.

Если  $A$  — конечное множество, содержащее  $n$  элементов, то в нем можно установить  $n!$  различных отношений порядка.

Лит.: [57, 61, 95].

**ПОРЯДОК БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ** — см. *Бесконечно малая*.

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ** — вычисление производных одна за другой. См. *Производные высших порядков*.

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ** — функция, заданная на множестве натуральных чисел  $N$ , обозначается обычно:  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  или  $\{a_n\}$ ,  $n \in N$ .

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАСХОДЯЩАЯСЯ** — *последовательность* чисел  $\{a_n\}$ , у которой нет конечного предела, т. е. либо ее предел — бесконечность, либо его не существует вовсе (см. *Предел последовательности*). Функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}$  называется расходящейся при данном значении  $x_0$ , если числовая последовательность  $\{f_n(x_0)\}$  является П. р.

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ СХОДЯЩАЯСЯ** — *последовательность* чисел  $\{a_n\}$ , имеющая конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  (см. *Предел последовательности*).

Последовательность функции  $\{f_n(x)\}$  называется сходящейся на отрезке  $[a; b]$  (на множестве  $E$ ), если при каждом фиксированном  $x_0 \in [a; b]$  ( $x_0 \in E$ ) получается числовая П. с.  $\{f_n(x_0)\}$ .

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МЕТОД** — метод численного решения математических задач. Состоит в способе находить по известному приближению решения следующее, более точное приближение. Применяется только в том случае, если последовательность указанных приближений сходится, т. е. является *последовательностью сходящейся*.

Например, для решения уравнения вида

$$f(x) = 0$$

(\*)

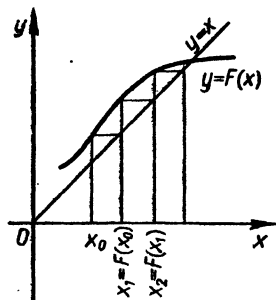


Рис. 63

рассматривают равносильное ему уравнение

$$x = F(x), \text{ где } F(x) = f(x) + x \quad (**)$$

и составляют последовательность:  $x_0$  — произвольное,  $x_1 = F(x_0)$ ,  $x_2 = F(x_1)$ , ...,  $x_n = F(x_{n-1})$ , ... . Если последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел, то этот предел есть корень уравнения (\*\*), а следовательно, и (\*). Процесс составления последовательных приближений наглядно показан на графике (рис. 63), где кривая — график функции  $F(x)$ , прямая  $OM$  — биссектриса координатного угла.

Последовательность таких приближений обязательно сходится, если  $|dF/dx| < \theta < 1$ . П. п. м. применяется также для численного решения систем ли-

нейных уравнений с большим количеством переменных. Этим методом находят приближенные решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. П. п. м. применяется также в вопросах теории. При его помощи доказывается теорема существования и единственности дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$ . Достаточные условия применимости П. п. м. устанавливают принцип *сжатых отображений*.

**ПОСТОРОННИЙ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ**  $f(x) = 0$  — корень уравнения  $f_1(x) = 0$ , не равносильного данному, но полученного при решении данного уравнения путем расширения области *определения* переменной  $x$  данного уравнения. П. к. обычно появляются при решении *иррациональных, логарифмических, тригонометрических* и других уравнений.

См. также: *Потерянные корни, Равносильные уравнения.*

**ПОСТОЯННАЯ ВЕЛИЧИНА** (константа) — величина, которая в данном процессе сохраняет свое значение. П. в. часто обозначается  $x = \text{const}$  (от латинского constans — постоянный, неизменный). Например, при сжатии идеального газа по закону Бойля — Мариотта произведение объема газа на давление является П. в. См.: *Переменная величина, Параметр.*

**ПОСТРОЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ** — решение геометрических задач на построение геометрических фигур с помощью различных инструментов (односторонней математической линейки, двусторонней линейки, циркуля, угольника и др.). П. г. называются также конструктивными задачами или конструктивной геометрией. Более подробно см. *Геометрические построения.*

**ПОСТУЛАТ** — синоним термина *аксиома*. Хотя в «Началах» Евклида аксиомы и П. различаются, однако логического различия между ними Евклид не указывает, и поэтому неясно, по какому признаку он относил одни предложения к П., а другие — к аксиомам.

Лат. postulatum — требование.

**ПОТЕНОТА ЗАДАЧА** — см. *Задача Потенота.*

**ПОТЕНЦИРОВАНИЕ** — действие, обратное *логарифмированию*. П. есть операция нахождения числа по данному его *логарифму*. Понятие П. используется при решении логарифмических уравнений и неравенств.

Нем. «potenzieren» от «Potenz» — степень.

**ПОТЕРЯННЫЕ КОРНИ** уравнения  $f(x) = 0$  — корни этого уравнения, которые в результате решения уравнения и сведения его к равносильному уравнению  $f_1(x) = 0$  не являются корнями последнего уравнения.

См. также: *Посторонние корни; Равносильные уравнения.*

Лит.: [95]

**ПОЯС ШАРОВОЙ** — см. *Шаровой пояс.*

**ПРАВАЯ КАСАТЕЛЬНАЯ** — см. *Односторонняя касательная.*

**ПРАВАЯ ПРОИЗВОДНАЯ** — см. *Односторонняя производная.*

**ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ** — правила для вычисления производных или дифференциалов — вместе с формулами дифференцирования дают возможность вычислять производные и дифференциалы от сколь угодно сложных элементарных функций.

П. д., выраженные в производных (или частных производных), если  $C$  — постоянная,  $u, v, w$  — функции, имеющие производные: 1)  $(Cu)' = Cu'$ ; 2)  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ; 3)  $(uv)' = uv' + u'v$ ; 4)  $(u/v)' = (vu' - v'u)/v^2$ ; 5) Если  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$ , т. е.  $y = f[\varphi(x)]$ , (где  $f$  и  $\varphi$  — дифференцируемые функции), то  $y'_x = f'_u(u)\varphi'_x(x)$ , или короче:  $y'_x = u'_u u'_x$ .

П. д., выраженные в дифференциалах, записываются аналогичными формулами. Если  $z = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $u_i = \varphi_i(x, y, \dots, t)$ , т. е.  $z = f[\varphi_1(x, \dots, t), \varphi_2(x, \dots, t), \dots, \varphi_n(x, \dots, t)]$ , то полный дифференциал  $z$  выражается формулой

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i.$$

**ПРАВИЛЬНАЯ ДРОБЬ** — обыкновенная дробь, у которой числитель меньше знаменателя. П р и м е р ы П. д.:  $1/2, 1/3, 2/5, 7/15$  и др. Число, обратное П. д., есть *неправильная дробь*.

См. также: *Дробь, Десятичная дробь, Неправильная дробь.*

**ПРАВИЛЬНАЯ ЧАСТЬ МНОЖЕСТВА** — то же, что и собственное подмножество множества.

**ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОГРАННИК** — выпуклый многогранник, у которого все грани — конгруэнтные правильные многоугольники и все многогранные углы конгруэнтны. Естественно, что число ребер, выходящих из каждой вершины П. м., одно и то же. Уже Евклидом было доказано существование только пяти типов П. м.: правильный *тетраэдр* (рис. 64, а), правильный *гексаэдр*, или *куб* (рис. 64, б), правильный *октаэдр* (рис. 64, в), правильный *дodeкаэдр* (рис. 64, г), правильный *икосаэдр* (рис. 64, д). Каждый из П. м. можно получить путем сечения куба определенными плоскостями. Все П. м., за исключением правильного

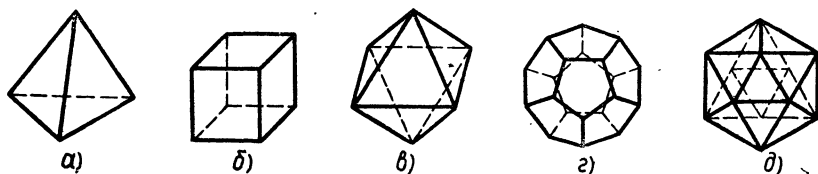


Рис. 64

тетраэдра, имеют центр симметрии. Вокруг каждого П. м. можно описать сферу и во всякий П. м. вписать сферу. Правильный тетраэдр двойствен (дуален) сам себе; куб двойствен правильному октаэдру; правильный додекаэдр двойствен правильному икосаэдру. У двойственных П. м. число вершин одного из них равно числу граней другого и, наоборот, число ребер у двойственных П. м. одно и то же. Центры граней П. м. являются вершинами двойственного ему П. м.

Для П. м., как и для многогранников нулевого рода (простых), справедлива формула (теорема) Декарта — Эйлера:

$$B + G - P = 2,$$

где  $B$  — число вершин,  $G$  — число граней,  $P$  — число ребер многогранника. Если П. м. существует конечное число, то *правильных многоугольников* существует бесконечное число.

См. также: *Двойственности принцип, Ось симметрии фигуры, Симметрия, Бипирамида.*

**ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК** — плоский, выпуклый многоугольник, у которого стороны конгруэнтны и все внутренние углы его также конгруэнтны. Другими словами, П. м. — равносторонний и равноугольный выпуклый многоугольник. В отличие от существования лишь конечного числа *правильных многогранников* П. м. существует бесконечное множество. Однако не всякий П. м. можно построить с помощью классических средств построения: циркуля и линейки. Например, правильные трех-, четырех-, пяти-, шести- — пятинадцатиугольники построить циркулем и линейкой можно, а правильные семи-, девяти-, одиннадцатиугольники построить этими инструментами уже нельзя. Гаусс доказал, что с помощью циркуля и линейки можно строить правильный  $n$ -угольник в том и только в том случае, если число  $n$  имеет вид:  $n = 2^k p_1 p_2 \dots p_m$ , где  $p_i$  — различные числа вида  $p_i = 2^{2^k} + 1$  (числа Ферма). Построение П. м. связано с делением окружности (круга) на  $n$  конгруэнтных частей или с решением уравнения  $x^n - 1 = 0$ , которое поэтому и называется уравнением *деления круга* (окружности).

Вокруг всякого П. м. можно описать и во всякий П. м. можно вписать окружность, и притом только единственную. Всякий П. м. имеет оси симметрии. П. м. с четным числом сторон  $2n$  имеет  $(2n + 1)$  осей симметрии, из которых  $2n$  осей лежат в плоскости П. м. и одна ось проходит через центр П. м. и перпендикулярна его плоскости. П. м. с нечетным числом сторон  $2n + 1$  имеет  $2n + 1$  осей симметрии, лежащих в плоскости П. м.

Сторона  $a_n$  (длина ее) П. м. выражается через радиус  $R$  описанной вокруг него окружности формулой

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Так, сторона правильного  $n$ -угольника при  $n = 3, 4, 6, 8, 10$  равна соответственно:

$$a_3 = R\sqrt{3}, \quad a_4 = R\sqrt{2}, \quad a_6 = R, \quad a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad a_{10} = R(\sqrt{5} - 1)/2.$$

Площадь П. м. равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности:  $S_n = \frac{1}{2} P \cdot r$ , где  $P = a_n \cdot n$  — периметр правильного  $n$ -угольника,  $r$  — радиус вписанной окружности (апофема) его.

Существует ровно  $2n$  перемещений, отображающих правильный  $n$ -угольник на себя, из которых  $n$  осевых симметрий и  $n$  поворотов, включая тождественный.

Иногда также рассматривают невыпуклые (звездчатые) П. м. Примером таких звездчатых П. м. может служить правильная пятиугольная звезда, у которой все стороны равны и все углы при вершинах равны.

См. также: *Окружность, Длина окружности, Площадь.*

**ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ:** 1°. П. п. функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ , заданных на отрезке  $[a; b]$  (интервале, множестве), есть функция  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , значение которой  $f(x_0)$  для произвольного  $x_0$  есть предел числовой последовательности  $\{f_n(x_0)\}$ ; этот предел должен существовать и быть конечным для всех  $x_0$  из отрезка (интервала, множества).

2°. П. п. чисел. Число  $C$  называется П. п. чисел  $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ , если для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что при  $n > N$  выполняется неравенство  $|C_n - C| < \varepsilon$ . Номер  $N$  зависит от  $\varepsilon$ , т. е.  $N = N(\varepsilon)$ . Изображая члены  $C_n$  последовательности точками на числовой оси (в случае последовательности действительных чисел) или на комплексной плоскости (в случае последовательности комплексных чисел), можно определение П. п. чисел сформулировать так: точка  $C$  является П. п. чисел  $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ , если в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $C$  — лежат почти все (т. е. все, кроме конечного числа) члены последовательности (рис. 65, а и 65, б).

Члены последовательности с различными номерами могут быть одинаковы и изображаться, следовательно, одной геометрической точкой. Поэтому в определении речь идет о числе членов последовательности, а не точек, их изображающих. Точка может и не быть предельной для множества точек, изображающих члены последовательности (это будет тогда и только тогда, когда все члены  $C_n$  совпадают между собой, начиная с некоторого номера  $n_0$ ). Например, последовательность  $C_1 = 1, C_2 = 10, C_3 = \pi, C_4 = 1, C_n = \sqrt{2} (n \geq 5)$  имеет предел  $\sqrt{2}$ , а множество изображающих точек конечно (состоит из точек  $1, 10, \pi, \sqrt{2}$ ) и не имеет предельной точки. Для П. п. чисел принят символ  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$  (иногда  $\lim C_n$ ). П. п.

чисел могут служить также символы  $\infty$  и  $-\infty$ . Последовательность действительных чисел  $\{C_n\}$  имеет пределом  $\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \infty$  (соответственно  $-\infty$ ), если для

всякого  $A$  существует номер  $N$ , что при  $n > N$  выполняется неравенство  $C_n > A$  ( $C_n < A$ , соответственно  $|C_n| > A$ ). Если окрестностью  $\infty$  считать любой интервал числовой оси вида  $[A; \infty[$ , окрестностью  $-\infty$  считать любой интервал вида  $]-\infty; A]$ , то определения бесконечных П. п. чисел формулируются теми же словами, что и в случае конечного П. п. чисел (только слова «точка  $C$ » надо заменить соответствующими символами  $\infty$  или  $-\infty$ ). Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся (к этому пределу).

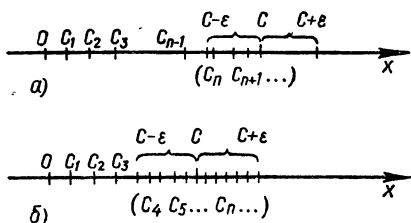


Рис. 65

Для последовательности комплексных чисел понятие П. п. чисел сводится к П. п. чисел в действительной области, так как имеет место следующее утверждение: число  $a + bi$  является П. п. чисел  $C_n = a_n + b_n i$  ( $n \in N$ ) тогда и только тогда, когда число  $a$  есть П. п.  $\{a_n\}$  и число  $b$  есть П. п.  $\{b_n\}$ . Считают  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n =$

$= \infty$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} |C_n| = \infty$ .

Примеры. 1) Последовательность  $a, \sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}, \dots, \sqrt[n]{a}, \dots$ , где  $a > 0$ , имеет:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ; 2) последовательность  $1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4, \dots, 1, 1/n, \dots$ ,

т. е.  $C_{2k-1} = 1, C_{2k} = 1/k$  ( $k \in N$ ), не имеет предела; две подпоследовательности, составленные одна из нечетных и другая из четных членов, имеют пределы:  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{2k-1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2k} = 0$ ; 3) последовательность  $C_n = (3 + ni)/(2n - i)$  сходится к пределу  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = i/2$ ; 4) последовательность  $C_n = n^2 + i/n$  имеет бесконечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \infty$ ; 5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$  ( $e$  — число).

**ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ СПРАВА** (соответственно слева). Число  $b$  называется П. ф. с. (соответственно слева) в точке  $a$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что при  $x \in ]a, a + \delta[$  (соответственно  $x \in ]a - \delta, a[$ ) выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ ; этот П. ф. с. обозначается  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$  или  $f(a+0)$  (соответственно  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$  или  $f(a-0)$ ). В отличие от *предела функции* в

точке  $a$  аргумент  $x$  изменяется не в полной окрестности точки  $a$ , а лишь в правой (соответственно левой) полуокрестности. Понятие П. ф. с. определяется и для случая бесконечных П. ф. с. аналогично понятию бесконечных пределов функции.

Условие  $f(a-0) = f(a+0)$  является необходимым и достаточным для существования предела функции  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , который иногда называют *двусторонним пределом функции* в отличие от односторонних пределов  $f(a-0)$  и  $f(a+0)$ . Если  $a = 0$ , то пишут:  $x \rightarrow +0$  и  $f(+0)$  (соответственно  $x \rightarrow -0$  и  $f(-0)$ ).

Примеры. 1)  $f(x) = 1/x, \lim_{x \rightarrow +0} (1/x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -0} (1/x) = -\infty$ ;

2)  $f(x) = 1/(1 + \exp(1/x)), \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1$ ;

3)  $f(x) = 2^{-1/x}, \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = +\infty$ .

Лит.: [87].

**ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ:** 1°. П. ф. от одной переменной  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  (или в точке  $x = x_0$ ). Число  $b$  называется П. ф.  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при  $x \neq x_0$  и  $|x - x_0| < \delta$  выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$  (определение П. ф. по Коши). Это определение равносильно следующему: число  $b$  называется П. ф.  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если для любой последовательности  $\{x_n\}$ , сходящейся к  $x_0$ , причем  $x_n \neq x_0$  ( $n \in N$ ), последовательность  $y_n = f(x_n)$  сходится к  $b$  (определение П. ф. по Гейне, в котором понятие П. ф. выражается через понятие *предела последовательности чисел*). В приведенных определениях П. ф. предполагается, что функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , кроме, может быть, самой точки  $x_0$ . П. ф. обозначается символом  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ .

Геометрическая иллюстрация П. ф.: число  $b$  есть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , если для всякого  $\varepsilon > 0$  можно указать такой прямоугольник с основанием  $2\delta > 0$ ,

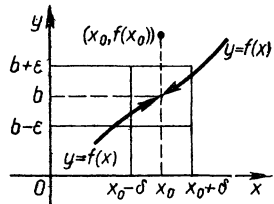


Рис. 66

высотой  $2\varepsilon$  и центром в точке  $C(x_0, b)$ , что все точки графика функции  $y = f(x)$  на интервале  $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ , за исключением, быть может, точки  $M_0(x_0, f(x_0))$ , лежат в этом прямоугольнике (рис. 66). Сформулированное выше понятие конечного П. ф. распространяется на случай бесконечных пределов. Функция  $y = f(x)$  имеет пределом  $\infty$  при  $x \rightarrow x_0$  (соответственно  $-\infty$ ), если для всякого  $A$  существует такое  $\delta > 0$ , что при  $x \neq x_0$  и  $|x - x_0| < \delta$  выполняется неравенство  $f(x) > A$  (соответственно  $f(x) < A$ ). Понятие П. ф.  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  распространяется также на случай, когда  $x_0$  является не числом, а одним из символов  $\infty$  или  $-\infty$ . Если воспользоваться понятием окрестности точки и понятием окрестности  $\infty$  или  $-\infty$  (см. *Предел последовательности чисел*), то все случаи П. ф. охватываются следующим определением: число  $b$  называется пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если для произвольной окрестности  $V(b)$  (числа или символа)  $b$  существует такая окрестность  $U(x_0)$  (числа или символа)  $x_0$ , что для всех  $x$ , принадлежащих  $U(x_0)$ , кроме, быть может, самого  $x_0$ , значение  $f(x)$  принадлежит  $V(b)$ . Предполагается, что  $f(x)$  определена в некоторой окрестности  $x_0$ . Здесь  $x_0$  и  $b$  могут быть числами или символами  $\infty$  или  $-\infty$ .

Примеры. 1)  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x = 1$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$  не существует; 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$  ( $e$  — число); 5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$ ; 6)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$ .

2°. П. ф. от многих переменных. Число  $b$  называется пределом функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(P)$  при  $P \rightarrow P_0$ , т. е. при  $x_1 \rightarrow x_1^0, x_2 \rightarrow x_2^0, \dots, x_n \rightarrow x_n^0$  (функция определена в окрестности точки  $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , кроме, быть может, самой точки  $P_0$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при  $|x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta, \dots, |x_n - x_n^0| < \delta$  и  $P \neq P_0$  выполняется неравенство  $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - b| < \varepsilon$ .

Равносильным будет требование, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  существовало такое  $\delta > 0$ , что при  $\rho(P, P_0) < \delta$ , где  $\rho$  — расстояние между точками  $P$  и  $P_0$  в  $n$ -мерном пространстве, т. е. для точек, лежащих в  $\delta$ -окрестности точки  $P_0$ , выполнялось неравенство  $|f(P) - b| < \varepsilon$ .

Понятие П. ф. от многих переменных обобщается на случай бесконечных пределов. Функция  $u = f(P)$  имеет пределом  $\infty$  при  $P \rightarrow P_0$  (пишут:  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \infty$ ), если для любого  $M > 0$  существует  $\delta > 0$ , что при  $0 < \rho(P, P_0) < \delta$  выполняется неравенство  $f(P) > M$ . Аналогично определяются П. ф. от многих переменных для случая  $-\infty$ .

Примеры. 1)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} x \sin(y/x) = 0$ ; 2)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 y / (x^4 + y^2))$  не существует, ибо при  $y = x^2$  имеем:  $f(x, x^2) = 1/2$ , а при  $y = 2x^2$  имеем:  $f(x, 2x^2) = 2/5$ .

Лит.: [87].



**ПРЕДЕЛОВ ТЕОРИЯ** — теория, являющаяся основанием современного математического анализа. П. т. изучает свойства пределов и устанавливает условия их существования и правила, по которым можно, зная пределы нескольких простых переменных величин, найти предел простейших функций этих величин.

Основой П. т. является понятие *бесконечно малой* величины, т. е. величины, имеющей своим пределом нуль. Чтобы переменная величина  $x_n$  имела своим пределом постоянное число  $a$ , необходимо и достаточно, чтобы разность  $\alpha_n = x_n - a$  была бесконечно малой. Если переменная величина  $x_n$  стремится к пределу  $a$  и  $p < a < q$ , то и все ее значения, начиная с некоторого, удовлетворяют этому двойному неравенству. Переменная величина  $x_n$  не может одновременно стремиться к двум различным пределам.

П. т. устанавливает ряд теорем, облегчающих нахождение пределов. Если для  $x_n$  и  $y_n$  при всех  $n$  справедливо  $x_n \geq y_n$  и  $x_n$  и  $y_n$  имеют конечные пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то  $a \geq b$ . Если  $x_n \leq y_n \leq z_n$  и существуют пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , то  $y_n$  имеет тот же предел, т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ .

Над переменными  $x_n$  можно совершать арифметические операции. Если существуют конечные пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то существуют также конечные пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n / y_n) = a/b$  ( $b \neq 0$ ). Если же  $a \neq 0$  и  $y_n \rightarrow \infty$  или  $y_n \rightarrow 0$ , то соответственно отношение  $x_n / y_n \rightarrow 0$  и  $x_n / y_n \rightarrow \infty$ . Если обе последовательности одновременно стремятся к 0 или к  $\infty$ , то в этих случаях говорят, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n / y_n)$  представляет собой неопределенность соответственно вида  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ . Для раскрытия таких неопределенностей, т. е. для отыскания предела  $x_n / y_n$ , существуют различные способы. Наиболее общим и удобным из них является *Лопиталевы правила*.

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , а  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ , то говорят, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n$  представляет собой неопределенность вида  $0 \cdot \infty$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ , то предел их разности  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)$  называют неопределенностью вида  $\infty - \infty$  (см. *Неопределенности*).

П. т. устанавливает критерии существования пределов (признаки сходимости). Если  $x_n$  монотонно не убывает,  $x_n \leq x_{n+1}$ , и ограничена сверху ( $x_n \leq M$ ), то существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  (если  $x_n$  не ограничено сверху, то  $x_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ). Аналогичное утверждение справедливо и для монотонно неубывающей последовательности. В общем случае, для того чтобы последовательность  $x_n$  имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа  $\varepsilon > 0$  существовал такой номер  $N$ , чтобы неравенство  $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$  выполнялось, как только  $n > N$  и  $n' > N$  (теорема Коши — Больцано); иными словами, значения переменной  $x_n$  должны безгранично сближаться между собой по мере возрастания их номеров.

В П. т. рассматриваются также последовательности  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ , извлеченные из данной, где  $\{x_{n_k}\}$  — некоторая последовательность возрастающих натуральных чисел:  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ . Роль номера, принимающего последовательно все натуральные значения, играет уже не  $n$ , а  $k$ ;  $n_k$  принимает натуральные значения; очевидно,  $n_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . Эта последовательность  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$  называется *частичной последовательностью* (или *подпоследовательностью*).

довательностью). Если последовательность имеет предел, то тот же предел имеет и всякая частичная последовательность. Из любой ограниченной последовательности всегда можно извлечь такую частичную подпоследовательность, которая имеет конечный предел (лемма Больцано — Вейерштрасса). Этот предел называют частным пределом исходной последовательности. Существует всегда наибольший частный предел ( $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ ) и наименьший частный предел ( $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ ). Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , то  $x_n$  имеет предел (в обычном смысле). Их общее значение и является тогда этим пределом.

Все основные понятия, изложенные для случая переменной величины  $x_n$  (числовой последовательности), переносят и на случай функций. Для того чтобы  $f(x) \rightarrow b$  при  $x \rightarrow a$ , необходимо и достаточно, чтобы для всякой последовательности чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , имеющей пределом число  $a$ , последовательность соответствующих значений функции  $f(x)$ , т. е. последовательность чисел  $f(x_1), \dots, f(x_n), \dots$ , имела своим пределом число  $b$ .

В новейшей математике вышеописанная схема была обобщена и развита в различных направлениях.

Еще древнегреческие ученые, вычисляя площади различных фигур, применяли операцию предельного перехода, хотя термина «предел» у них не было. Общая П. т. начинает создаваться в XVII в. Обозначение  $\lim$  ввел И. Ньютон (1686), развивавший П. т. для метода флюксий. Понятие предела монотонной последовательности сформулировано французским математиком Ж. Даламбером (1765) и русским математиком С. Е. Гурьевым (1798). Современная теория пределов базируется на внутреннем критерии сходимости Коши — Больцано (1817). Вполне современное определение предела «на языке  $\varepsilon - \delta$ » было дано немецким математиком К. Вейерштрассом (1880). См.: *Предел, Дедекиндово сечение*.

Лит.: [87].

**ПРЕДЕЛЬНАЯ СФЕРА** в пространстве Лобачевского — синоним термина *Орисфера*.

**ПРЕДЕЛЬНАЯ ТОЧКА**: 1° П. т. множества в топологическом пространстве — такая точка  $M$ , что в любой ее окрестности содержится по крайней мере одна точка данного множества, отличная от  $M$ . Отсюда следует, что в любой окрестности П. т. содержится бесконечное число точек данного множества. П. т. множества может как принадлежать, так и не принадлежать самому множеству.

П р и м е р ы. 1) Множество  $N$  натуральных чисел не имеет П. т.; 2) множество чисел вида  $\sqrt{n} - 1/m$ , где  $n$  и  $m$  пробегает независимо друг от друга все натуральные числа  $N$ , имеет бесконечно много П. т., а именно  $\{\sqrt{n}\}, n \in N$ ; 3) П. т. множества внутренних точек круга на плоскости являются все внутренние точки круга и все точки окружности, ограничивающей круг; 4) для множества точек  $M(x, y, z)$  пространства, у которых все координаты  $x, y, z$  — всевозможные рациональные числа, П. т. является любая точка пространства; 5) в метрическом пространстве непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций, в котором расстояние  $\rho(f(x), g(x)) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$  для множества, состоящего из всевозможных многочленов, — любая точка пространства (т. е. любая непрерывная на  $[a, b]$  функция) является П. т. Это утверждение равносильно теореме Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами.

2°. П. т. последовательности — частичный *предел последовательности*.  
Лит.: [87].

**ПРЕДЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ** — *предел последовательности функций*.

**ПРЕДЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ** функции — *предел функции*.

**ПРЕДИКАТ** — то же, что *отношение  $n$ -арное*. В математической логике под П. понимают логическую функцию от  $n$  предметных переменных, принимающую значение либо истинности, либо ложности.

Лат. praedicatum — сказанное.

Лит.: [59].

**ПРЕДИКАТОВ ИСЧИСЛЕНИЕ** — раздел математической логики, объектом изучения которого является дальнейшее обобщение *высказываний исчисления*. В П. и. наряду с операциями *конъюнкции*, *дизъюнкции* и отрицания высказываний и предикатов участвуют кванторы, а также изучаются законы получения истинных следствий (теорем) из истинных посылок (аксиом), т. е. в П. и. изучаются элементы теории доказательств.

Лит.: [59].

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ** — отображение  $P$  группы  $G$  на некоторое множество неособенных квадратных *матриц* порядка  $n$ , удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} P(g_1, g_2) &= P(g_1) P(g_2), \\ P(g^{-1}) &= P(g)^{-1} \end{aligned}$$

для любых  $g_1, g_2, g^{-1}$  из  $G$ . Элементы  $g_1 \cdot g_2$  и  $g^{-1}$  означают умножение и обратный элемент в группе, а  $P(g_1) \cdot P(g_2)$  и  $P(g)^{-1}$  — умножение матриц и обратную матрицу. Говоря более абстрактно, П. г. есть *гомоморфизм* группы в группу всех невырожденных матриц порядка  $n$ . Число  $n$  называется размерностью П. г. При выборе определенного базиса в  $n$ -мерном *линейном пространстве*  $L$  матрицы  $P(g)$ ,  $g \in G$  задают линейные преобразования этого пространства. Если существует собственное ненулевое подпространство  $N \subset L$ , такое, что  $P(g)x \in N$  для любого  $g \in G$  и  $x \in N$ , то говорят, что П. г. приводимо, в противном случае П. г. называют неприводимым. К настоящему времени теория П. г. является развитой теорией, лежащей на стыке алгебры, функционального анализа и дифференциальной  $n$ -мерной геометрии. Крупные результаты получены здесь Дж. Юнгом, Э. Картаном, Г. Вейлем, И. Шуром, И. М. Гельфандом, А. А. Кирилловым.

**П р и м е р ы.** 1. Группа *подстановок* из 3 элементов (123), (132), (213), (231), (312), (321) получает П. г., если положить:

$$\begin{aligned} P(123) &= \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}, P(132) = \begin{pmatrix} 100 \\ 001 \\ 010 \end{pmatrix}, P(213) = \begin{pmatrix} 010 \\ 100 \\ 001 \end{pmatrix}, \\ P(231) &= \begin{pmatrix} 001 \\ 100 \\ 010 \end{pmatrix}, P(312) = \begin{pmatrix} 010 \\ 001 \\ 100 \end{pmatrix}, P(321) = \begin{pmatrix} 001 \\ 010 \\ 100 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Любая группа  $G$  имеет П. г., определяемое равенством  $P(g) = E$  для всех  $g \in G$ . Здесь  $E$  — единичная матрица порядка  $n$ . Такое П. г. называется тривиальным.

Лит.: [37].

**ПРЕКРАЩЕНИЯ ТОЧКА** — особая точка кривой, в которой кривая обрывается. Например, для кривой  $y = x \lg x$  начало координат является П. т. (рис. 67).

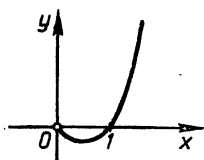


Рис. 67

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ** — переход от одной системы координат к другой. Задача П. к. состоит в том, что, зная координаты точки  $M$  в одной системе координат, надо найти координаты этой же точки в другой системе координат. Формулы, которые связывают координаты точки  $M$  в одной и другой (старой и новой) системах координат, называют формулами П. к. Так, формулы П. к. при переходе от одной прямоугольной декартовой системы координат  $xOy$  к другой прямоугольной декартовой системе координат  $x'O'y'$  имеют вид:

$$\begin{aligned}x' &= (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha, \\y' &= -(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha,\end{aligned}$$

а формулы обратного перехода:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + x_0, \\y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + y_0,\end{aligned}$$

где  $x_0, y_0$  — координаты нового начала  $O'$  в старой системе координат, а  $\alpha$  — угол между осями  $Ox$  и  $O'x'$ .

Формулы П. к. при переходе от прямоугольной системы координат к полярной (полось абсцисс совпадает с полярной полосью):

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \sin \varphi = y : \sqrt{x^2 + y^2}, \cos \varphi = x : \sqrt{x^2 + y^2},$$

а обратный переход происходит по формулам:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi.$$

См. также: *Координаты*.

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МНОЖЕСТВА**  $X \neq \emptyset$  — взаимно однозначное отображение (биекция) этого множества на себя:

$$f: X \rightarrow X.$$

В геометрии чаще всего рассматривают П. м. точек. Часто П. м. точек плоскости (пространства) образуют *группу*; так, известны группа *поворотов* плоскости вокруг некоторой фиксированной точки, группа *параллельных переносов*, группа *перемещений* (движений, изометрий), группа *подобия*, группа *аффинных* П. плоскости, группа *проективных преобразований*.

Каждая группа П. сохраняет некоторые свойства фигур неизменными (инвариантными) относительно этой группы П. Поэтому каждая группа П. определяет свои свойства геометрических фигур, свою геометрию. Так, изучают метрические, аффинные, проективные, топологические свойства фигур (см. *Эрлангенская программа*). Чем уже группа П., тем больше инвариантных свойств фигур она изучает, тем богаче она содержанием. И чем шире группа, тем меньше инвариантных свойств фигур она изучает, тем глубже эти свойства связаны с самой фигурой. Наиболее глубокими свойствами фигур являются топологические свойства, остающиеся инвариантными при всяких топологических преобразованиях (взаимно одно-

значных и непрерывных). К топологическим свойствам фигур относятся *размерность, связность, ориентация*.

См. также: *Группа преобразований, Аффинное преобразование*.

Лит.: [3, 6].

**ПРИБЛИЖЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ** величины — всякое значение  $a$ , отличное от точного (истинного) ее значения  $x$  на некоторое число. Если число  $a$  есть П. з., а  $x$  — точное значение, то обычно пишут:  $x \approx a$  (читают:  $x$  приближенно равно  $a$ ). Если П. з. величины  $a$  больше  $x$ , то говорят, что число  $a$  называется П. з. числа  $x$  с избытком; если П. з. величины  $a$  меньше  $x$ , то число  $a$  называется П. з. числа  $x$  с недостатком (или по недостатку). П. з. величины иначе называют *п р и б л и ж е н и е м*.

Степень приближения, т. е. замены числа  $x$  числом  $a$ , определяется абсолютной *погрешностью приближения*: разностью точного и приближенного значений величины:  $|x - a|$ .

См. также: *Погрешность, Значащая цифра, Десятичные приближения*.

**ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ** — раздел вычислительной математики, занимающийся приближенным решением дифференциальных уравнений. Первой задачей П. и. является приближенное вычисление интегралов, которое соответствует решению простейшего дифференциального уравнения  $y' = f(x)$ . В тех случаях, когда точное интегрирование невозможно, так как интеграл не может быть выражен в известных функциях, применяются аналитические методы П. и., которые заключаются в том, что подынтегральная функция приближенно заменяется другой, интеграл от которой легко вычисляется. В качестве такой функции обычно берут интерполяционный многочлен, т. е. многочлен, совпадающий с подынтегральной функцией в некоторых точках  $x_i$  (узлах интерполяции). Получающиеся в результате формулы (так называемые квадратурные формулы) имеют вид:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i(x_1, x_2, \dots, x_n, a, b) f(x_i) + R,$$

где  $R = R(n)$  — погрешность данной формулы П. и. Если число узлов интерполяции равно  $n$ , то, очевидно, интегралы многочленов степени не выше  $n - 1$  будут вычислены точно.

Однако за счет удачного выбора узлов интерполяции степень многочленов, интеграл которого вычисляется точно с помощью квадратурной формулы, может быть повышена. Формула П. и. считается тем точнее, чем выше эта степень (при фиксированном  $n$ ). Часто для уменьшения погрешности и получения возможно более простых коэффициентов  $A_i$  отрезок интегрирования  $[a, b]$  разбивают на части и к каждой применяют выбранную формулу П. и. Разбивая отрезок  $[a, b]$  на  $m$  равных отрезков и заменяя подынтегральную функцию на каждом отрезке линейной (т. е. многочленом первой степени), совпадающей на его концах с подынтегральной, получим *трапеций формулу*:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{m} \left[ \frac{y_0 + y_m}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{m-1} \right] + R,$$

где  $x_0 = a$ ,  $x_m = b$ ,  $y_i = f(x_i)$ ,  $R \leq (b-a)^3/12m^2M_2$ ,  $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ .

Если же на каждом из  $m$  отрезков разбиения подынтегральную функцию  $f(x)$  заменить многочленом второй степени, совпадающим с  $f(x)$  на концах и середине отрезка, то получится *парабол формула* (формула Симпсона):

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6m} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{2m-1} + y_{2m}] + R,$$

где  $x_0 = a, x_2, x_4, \dots, x_{2m} = b$  — точки разбиения отрезка  $[a, b]$  на  $m$  равных частей,  $x_1, x_3, \dots, x_{2m-1}$  — середины этих частей,  $y_j = f(x_j)$ ,  $(j = 0, 1, \dots, 2m)$

$$R \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{M_4}{90m^4}, \quad M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{IV}(x)|.$$

Отказавшись от требования, чтобы узлы интерполяции разбивали отрезок  $[a, b]$  на равные части, можно повысить точность формулы. Такова, например, формула Гаусса:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_1^{(n)} f(x_1) + A_2^{(n)} f(x_2) + \dots + A_n^{(n)} f(x_n) + R_n.$$

Здесь  $x_i$  — корни многочлена Лежандра  $n$ -й степени (который имеет вид  $P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$  и все корни которого действительны и лежат в интервале  $]-1, 1[$ ):

$$A_i^{(n)} = \frac{2}{(1 - x_i)^2 [P_n'(x_i)]^2}, \quad R(n) = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} \cdot f^{(2n)}(c)$$

для некоторого  $c \in ]-1, 1[$ . Эта формула дает точное значение интеграла для многочленов степени не выше  $2n - 1$ . Составлены таблицы величин  $x_i$  и  $A_i^{(n)}$  для многих  $n$ .

Существует также много других формул, выражающих приближенное значение интеграла с помощью значений производных от  $f(x)$  в узлах интерполяции, конечных разностей в узлах интерполяции и т. д.

*Неопределенный интеграл* вычисляют как *определенный* с переменным верхним пределом интегрирования, получая ответ в виде таблицы значений первообразной функции. Формулы П. и. обобщаются и на кратные интегралы.

Лит.: [8].

**ПРИВЕДЕНИЕ ПОДОБНЫХ ЧЛЕНОВ** многочлена — тождественное преобразование многочлена, заключающееся в замене всех *подобных членов* одним членом. П р и м е р. Если в некотором многочлене имеются подобные члены

$$A_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, A_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \dots, A_k x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad (*)$$

то П. п. ч. многочлена есть замена множества подобных членов (\*) одним членом

$$(A_1 + A_2 + \dots + A_k) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_k$  — числовые коэффициенты при переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в подобных членах (\*).

См. также: *Тождество, Одночлен, Тождественное преобразование, Сокращение дроби.*

**ПРИВЕДЕННАЯ СИСТЕМА ВЫЧЕТОВ** — часть *полной системы вычетов*, состоящая из чисел, взаимно простых с модулем  $m$ . Любые  $\varphi(m)$  чисел, не сравнимые по модулю  $m$  и взаимно простые с ним, образуют П. с. в. по этому модулю. Здесь  $\varphi(m)$  — *Эйлера функция*.

Лит.: [13].

**ПРИВЕДЕННОЕ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ** — квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ , у которого первый коэффициент  $a = 1$ .

**ПРИВОДИМЫЙ МНОГОЧЛЕН** над кольцом  $P$ . Многочлен называется П. м. над кольцом  $P$  тогда и только тогда, когда он разлагается в произведение по крайней мере двух многочленов ненулевой степени с коэффициентами из того же кольца. Если же такое разложение многочлена в произведение многочленов над тем же кольцом невозможно, то этот многочлен называется неприводимым.

Один и тот же многочлен может быть приводимым в одном кольце и неприводимым в другом. Так, например, многочлен  $f(x) = x^2 - 5$  неприводим в поле рациональных чисел, но приводим в поле действительных чисел, так как  $x^2 - 5 = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$ . Или, например, многочлен  $f(x) = x^2 + 5$  неприводим как в поле рациональных чисел, так и в поле действительных чисел, но приводим в поле комплексных чисел, так как  $x^2 + 5 = (x + i\sqrt{5})(x - i\sqrt{5})$ .

Вопрос о приводимости того или иного многочлена даже в поле рациональных чисел до последнего времени имел весьма громоздкие общие методы решения. Наиболее известными методами решения вопроса о приводимости многочленов, а также нахождения множителей этого многочлена в поле рациональных чисел были методы, разработанные в прошлом столетии немецким математиком Л. Кронекером. Однако его методы настолько громоздки, что даже для решения вопроса о приводимости многочленов пятой степени приходится испытывать миллионы различных гипотез, причем испытание каждой гипотезы в свою очередь требует также довольно много выкладок и вычислений. В XX в. были найдены новые методы решения вопросов о приводимости многочленов.

Лит.: [47].

**ПРИЗМА** — многогранник, у которого две грани — конгруэнтные  $n$ -угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные  $n$  граней — параллелограммы. Конгруэнтные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, называются *основаниями* призмы (иногда верхним и нижним основаниями П.), а другие грани (параллелограммы) — боковыми гранями П. П., основанием которой является  $n$ -угольник, называется  $n$ -угольной: при  $n = 3$  П. треугольная, при  $n = 4$  П. четырехугольная и т. д. На рисунке 68, а изображена 5-угольная П.

Объединение боковых граней П. называется ее боковой поверхностью. Каждые соседние боковые грани П. имеют общее ребро, называемое боковым ребром П. Все боковые ребра П. конгруэнтны и параллельны друг другу. П., у которой боковые ребра перпендикулярны основаниям, называется *прямой* П. Все другие П. называются *наклонными*. Прямая П., в основаниях которой лежат правильные многоугольники, называется *правильной*.

П., основанием которой является параллелограмм, называется *параллелепипедом*.

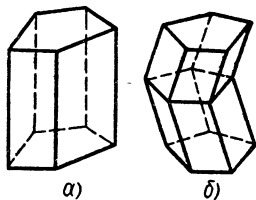


Рис. 68

Иногда  $\Pi$  определяют и конструктивно: рассматривают произвольный простой многоугольник, лежащий в плоскости  $\alpha$ . И из каждой точки его в одном из полупространств, определяемых плоскостью  $\alpha$ , откладывают отрезок, равный по длине и параллельный заданному отрезку  $MN$ , предполагая, что прямая  $MN$  пересекает плоскость  $\alpha$ . Тогда множество точек всех таких построенных отрезков образует многогранник, который и называется  $\Pi$  с двумя отмеченными (выбранными) основаниями, образованными концами построенных отрезков.

Можно определить призму с помощью *призматической* (замкнутой) *поверхности* и пересечения всех ее образующих двумя параллельными плоскостями.

Если плоскость  $\gamma$  перпендикулярна боковому ребру  $\Pi$ , то точки пересечения ее с прямыми, на которых лежат боковые ребра, служат вершинами многоугольника, который называется перпендикулярным *сечением*  $\Pi$ .

Площадь боковой поверхности  $\Pi$  равна произведению периметра перпендикулярного сечения на длину бокового ребра.

Объем любой  $\Pi$  равен произведению площади ее основания на высоту.

Определение  $\Pi$  иногда дается в литературе неверно: призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы (см., например: А. П. К и с е л е в. Геометрия, ч. 2, 1950, в. 33). Такому определению удовлетворяет, например, многогранник, изображенный на рисунке 68, б и не являющийся призмой.

Греч. *πρίσμα* — отпиленный (кусок), опилки (*πρίω* — пилю).

См. также: *Призматическая поверхность*, *Правильные многогранники*, *Цилиндр*, *Симпсона формула*.

**ПРИЗМАТИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ** — поверхность, образованная движением прямой в пространстве так, что эта прямая остается параллельной самой себе и пересекает данную ломаную линию (замкнутую или незамкнутую).  $\Pi$  п. — частный случай *цилиндрической поверхности*.  $\Pi$  п. является *линейчатой поверхностью*. Прямая, перемещающаяся в пространстве и образующая  $\Pi$  п., называется *образующей*, а ломаная, которую пересекает образующая, называется *направляющей*.

**ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ ЧИСЕЛ** — критерии (признаки, правила), позволяющие судить о делимости (нацело, без остатка) одних натуральных чисел на другие.

Лит.: [20, 45, 57].

**ПРИМИТИВНАЯ ФУНКЦИЯ** — реже употребляемый синоним *первообразной функции*.

**ПРИРАЩЕНИЕ:** 1°.  $\Pi$  аргумента — разность между двумя значениями (новым и старым) аргумента:  $\Delta x = x_1 - x_0$ .

2°.  $\Pi$  функции  $y = f(x)$  в данной точке  $x$  определяется  $\Pi$  аргумента  $\Delta x$  и равно разности  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ , где  $\Delta x$  —  $\Pi$  аргумента.

**ПРИСОЕДИНЕННАЯ МАТРИЦА** (взаимная матрица) к квадратной матрице  $A$  — матрица, в которой вместо каждого элемента  $a_{ij}$  поставлено его *алгебраическое дополнение*  $A_{ij}$ , а затем матрица транспонирована. Для матрицы  $n$ -го порядка:



$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{П. м. будет матрица } A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Про изведение матрицы  $A$  на П. м.  $A^*$  равно *скалярной матрице*, у которой на главной диагонали стоит определитель  $D = \det A$  матрицы  $A$ , т. е.

$$AA^* = A^*A = \begin{vmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{vmatrix}.$$

Поэтому *обратная матрица*  $A^{-1}$  к невырожденной матрице  $A$  выражается так  $A^{-1} = D^{-1}A^*$ .

Лит.: [47].

**ПРОГРЕССИЯ** — см. *Арифметическая прогрессия*, *Геометрическая прогрессия*.

**ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ** — геометрическая дисциплина, изучающая проективные свойства фигур, т. е. такие свойства фигур, которые остаются инвариантными при всех *проективных преобразованиях* плоскости (пространства) в себя. Другими словами, П. г. есть геометрия, определяемая группой *проективных преобразований*. Источником зарождения П. г. был метод *проекций*, который и привел к новой геометрической теории, названной П. г.

Изложение П. г. можно вести с различных позиций: аксиоматически, аналитически (вводя *однородные координаты*) или чисто синтетически, привлекая на помощь и интуицию, вводя при этом бесконечно удаленные объекты (точки, прямые и плоскости). Введение однородных координат позволяет свести теоремы П. г. к алгебраическим уравнениям.

Одним из основных понятий П. г. является *сложное отношение* четырех точек прямой, а также принцип двойственности (принцип дуальности), см. *Двойственности принцип*. П. г. также относится к *неевклидовой геометрии*.

Лит.: [6, 93].

**ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ**: П. п. в проективной геометрии — евклидова плоскость, пополненная бесконечно удаленными (*несобственными*) элементами. Каждая прямая, пополненная несобственной точкой, становится замкнутой (проективной прямой). В П. п. нет параллельных прямых, любые две прямые пересекаются. П. п. содержит несобственную прямую, однако в П. п. нет никакого различия между собственными (обычными) прямыми и несобственной. С аналитической точки зрения П. п. определяется как множество (класс) пропорциональных троек  $(x_1 : x_2 : x_3)$  — однородных координат точки, не равных одновременно нулю. Кроме определенной выше П. п., существуют еще конечные П. п., содержащие конечное число точек; на конечных П. п. прямые также содержат конечное число точек (число точек равно числу прямых). Конечных П. п. бесконечное множество.

**ПРОЕКТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ** плоскости (пространства) — такое взаимно однозначное отображение проективной плоскости (пространства) в себя,

при котором точки, принадлежащие одной прямой, переходят в точки, принадлежащие, вообще говоря, другой прямой. П. п. проективной прямой называется такое взаимно однозначное отображение ее в себя, при котором *гармоническая четверка* точек этой прямой переходит в гармоническую четверку точек той же прямой. Основным инвариантом П. п. прямой (плоскости, пространства) является сложное отношение четырех точек. П. п. (прямой, плоскости, пространства) образуют *группу*. П. п. точек  $M' (x'_1 : x'_2 : x'_3)$  и  $M (x_1 : x_2 : x_3)$  проективной плоскости задается формулами:

$$x'_1 = \rho (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3),$$

$$x'_2 = \rho (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3),$$

$$x'_3 = \rho (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3),$$

где  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ , а  $\rho$  — любое действительное число, отличное от нуля.

В геометрии рассматривают также П. п. евклидовой плоскости (евклидова пространства), где декартовы координаты  $(x, y)$  точки  $M$  (прообраз) и координаты  $(x', y')$  точки  $M'$  (образ) связаны формулами:

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.$$

Точки прямой  $a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$  не имеют себе соответственных (образов), и поэтому взаимно однозначное соответствие для точек этой прямой нарушается.

Наиболее важным и вместе с тем простейшим примером П. п. является *гомология*, оставляющая неподвижными (инвариантными) точки некоторой прямой (оси гомологии), а также некоторую точку, не принадлежащую или принадлежащую этой прямой (во втором случае — особая гомология).

Лит.: [93].

**ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО** — пространство, полученное из евклидова пространства, дополненного несобственными (бесконечно удаленными) элементами: несобственными точками, несобственными прямыми и несобственной плоскостью. Каждая прямая дополняется только одной несобственной точкой, каждая плоскость — одной несобственной прямой и все пространство — одной несобственной плоскостью. Однако различия между собственными и несобственными (конечными и бесконечно удаленными) элементами в П. п. нет. В П. п. нет параллельных прямых и плоскостей: любые две прямые пересекаются, любая прямая и плоскость пересекаются, любые две плоскости пересекаются по прямой.

П. п. может быть определено и аксиоматически как совокупность объектов трех родов: точек, прямых и плоскостей, для которых определены отношения принадлежности и порядка так, что выполняются определенные требования системы аксиом *проективной геометрии*.

П. п. может быть определено и как множество точек  $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$  — четверок пропорциональных чисел, из которых хотя бы одно не равно нулю, являющихся однородными координатами любой точки  $M$ . Две четверки чисел  $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$  и  $(\lambda x_1 : \lambda x_2 : \lambda x_3 : \lambda x_4)$ , где  $\lambda \neq 0$ , определяют одну и ту же точку П. п.

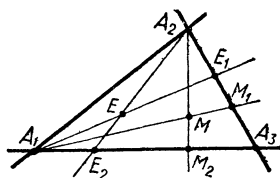


Рис. 69

**ПРОЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ.** П. к. точки на проективной плоскости — три числа  $x_1, x_2, x_3$ , одновременно не равные нулю, определяющие однозначно положение точки на этой плоскости. Проективная система координат на плоскости задается треугольником  $A_1A_2A_3$  и единичной точкой  $E$ , не лежащей ни на одной из прямых — сторон треугольника (рис. 69).

Пусть точка  $M$  — произвольная точка проективной плоскости, не лежащая на прямой  $A_1A_2$ ,  $M_1$  — проекция ее из точки  $A_1$  на прямую  $A_2A_3$ ,  $M_2$  — проекция ее из точки  $A_2$  на прямую  $A_1A_3$ . Положение точки  $M_1$  на прямой  $A_2A_3$  однозначно определяется неоднородной координатой  $x_{M_1}$  относительно базисных точек  $A_2, A_3, E_1$ , а  $M_2$  на прямой  $A_1A_3$  определяется неоднородной координатой  $x_{M_2}$  относительно базисных точек  $A_1, A_3, E_2$ , тогда точка  $M$  однозначно определится как пересечение прямых  $A_1M_1$  и  $A_2M_2$ .

Однородные П. к.  $x_1, x_2, x_3$  точки  $M$  плоскости относительно базисных точек  $A_1, A_2, A_3$  и  $E$  определяются равенствами:

$$\frac{x_1}{x_3} = (A_1A_3, E_2M_2), \quad \frac{x_2}{x_3} = (A_2A_3, E_1M_1).$$

Однородные П. к.  $(x_1 : x_2 : x_3)$  точки  $M$  и  $(\lambda x_1 : \lambda x_2 : \lambda x_3)$ , где  $\lambda \neq 0$ , принимаются за координаты одной и той же точки.

Прямая на проективной плоскости задается линейным однородным уравнением

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$

где числа  $u_1, u_2, u_3$  называются координатами прямой. Аналогично определяются П. к. и в пространстве.

П. к. точки на плоскости называются также трилинейными или треугольными координатами.

**ПРОЕКЦИЯ:** 1°. П. центральная точки  $M$  на плоскость  $\alpha$  — точка  $M'$  пересечения прямой, проходящей через точку  $M$  и некоторую другую фиксированную точку  $S$ , где  $S \notin \alpha$  и  $M \neq S$  (точка  $M$  не совпадает с

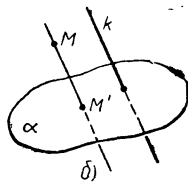
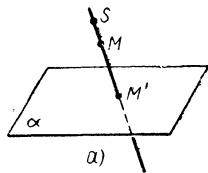


Рис. 70

$S$ ), с плоскостью  $\alpha$  (рис. 70, а). Точка  $S$ , не принадлежащая плоскости  $\alpha$ , называется центром П. или центром проектирования, плоскость  $\alpha$  — плоскостью П. или картинной плоскостью, прямая  $MS$  — проектирующей прямой. Если точка  $M$  лежит между точками  $S$  и  $M'$ , то иногда луч  $SM$  в этом случае называют проектирующим лучом или «лучом зрения», а точку  $S$  в этом случае ради наглядности также иногда называют «глазом». Точку  $M$  в центральной П. называют прообразом (оригиналом), а точку  $M'$  — образом (копией). Центральная П. фигуры  $\Phi$  на плоскость  $\alpha$  есть множество центральных П. всех точек этой фигуры.

Законы (свойства) центральной П. довольно

сложны и малопригодны в учебном процессе средней школы: параллельность прямых в центральной П., вообще говоря, не сохраняется, простое отношение трех точек также не сохраняется, окружность в этой проекции может спроектироваться в любую кривую второго порядка, а это уже вызывает затруднения в изображении ряда фигур. Однако сложное отношение четырех точек прямой в центральной П. сохраняется.

Центральная П. изучается в *проективной и начертательной геометрии*. Центральная П. иначе называется *перспективной* или *конической П.* Если точка  $S$  удаляется в бесконечность, то в этом случае все проектирующие прямые становятся параллельными между собой и центральная П. вырождается в параллельную П. Центральная П. широко применяется в живописи.

2°. П. параллельная точки  $M$  на плоскость  $\alpha$  — точка  $M'$  пересечения прямой  $p$ , проходящей через точку  $M$  и параллельной заданной прямой  $k$  (пересекающей плоскость  $\alpha$ ), с плоскостью  $\alpha$  (рис. 70, б). Плоскость  $\alpha$  при этом, как и в случае центральной проекции, называется плоскостью П. или картинной плоскостью.

П. п. фигуры  $\Phi$  на плоскость  $\alpha$  называется множество П. п. всех точек фигуры  $\Phi$  на эту плоскость.

Если проектирующие прямые (прямые, параллельные прямой  $k$ , пересекающей плоскость изображений  $\alpha$ ) ортогональны (перпендикулярны) плоскости  $\alpha$ , то П. п. называется *ортогональной* или *прямоугольной*.

Законы (свойства) П. п. значительно проще, нежели законы центральной проекции. Так, при П. п. сохраняется параллельность прямых, простое отношение трех точек. Эти свойства уже значительно проще, чем свойства центральной проекции. Так, квадрат при П. п. спроектируется в виде параллелограмма, правильный тетраэдр в виде произвольного четырехугольника вместе с его диагоналями. Однако необходимо отметить, что величина углов, длина отрезков при П. п., вообще говоря, не сохраняется: биссектриса треугольника-оригинала в П. п. уже не будет биссектрисой треугольника-проекции, но медиана треугольника в проекции также останется медианой треугольника-проекции.

П. п. и ортогональная П. широко используются в *начертательной геометрии*. Существуют частные случаи П. п. и ортогональной П.

3°. П. с числовыми отметками точки — ортогональная проекция этой точки на некоторую плоскость  $\alpha$  вместе с «отметкой» точки, т. е. с числом, выражающим высоту точки над плоскостью  $\alpha$ . Таким образом, плоскость  $\alpha$  служит как бы плоскостью уровня воды в море. Точки в пространстве, расположенные ниже плоскости  $\alpha$ , будут в П. с ч. о. иметь своими отметками отрицательные числа. Обычно П. с ч. о. используются в географии, когда требуется изобразить рельеф некоторой части земной поверхности. Линия, все точки которой имеют одну и ту же П. с ч. о., называется *линией уровня* или *горизонталью поверхности*.

В педагогическом процессе чаще всего приходится пользоваться параллельной П. или ее частным случаем — ортогональной проекцией, особенно при изображении сферы или при изображении фигур, вписанных в сферу или описанных вокруг нее.

Лат. *projectio* — отбрасываю вперед; по смыслу означает: изображение, тень.

См. также: *Аксонометрия, Полное изображение фигуры, Эпюр, Чертеж, Абрис, Дезарга теорема, Польке — Шварца теорема.*

Лит.: [93, 95].

**ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ**  $P$  и  $Q$  определяется как сумма одночленов, равных произведениям каждого члена многочлена  $P$  на каждый член многочлена  $Q$ , т. е. если

$Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  — произвольный член многочлена  $P$  и

$Bx_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$  — произвольный член многочлена  $Q$ ,

то  $PQ$  будет суммой всевозможных членов вида

$ABx_1^{\alpha_1+\beta_1} x_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots x_n^{\alpha_n+\beta_n}$ . П. м. удовлетворяет закону *коммутативности* и закону *ассоциативности*, т. е.  $PQ = QP$  и  $(PQ)R = P(QR)$ , для произвольных многочленов  $P$ ,  $Q$  и  $R$ . П. м. относительно *суммы многочленов* удовлетворяет закону *дистрибутивности*  $P(Q + R) = PQ + PR$ . Лит.: [47].

**ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ** — устаревшее название операции *пересечения множеств*. На множествах часто рассматривают операцию *прямого произведения множеств*.

**ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ** двух топологических пространств  $X$  и  $Y$  есть третье топологическое пространство  $Z$ , определяемое так: множество точек пространства  $Z$  есть *прямое произведение* множеств точек  $X$  и  $Y$  (обозначение:  $Z = X \times Y$ ). Множество в  $Z$ , являющееся прямым произведением двух открытых множеств в  $X$  и  $Y$ , по определению открыто. Система всех таких множеств задает в  $Z$  топологию. Например, П. т. двух отрезков есть квадрат. П. т. двух окружностей есть поверхность тора и т. п. Топологические пространства  $Z_1 = X \times Y$  и  $Z_2 = Y \times X$  гомеоморфны (см. *Гомеоморфизм*).

**ПРОИЗВОДНАЯ** одно из основных понятий дифференциального исчисления. Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой *окрестности* точки  $x = x_0$ . П. от данной функции  $f$  в данной точке  $x_0$  (или при данном значении  $x_0$ ) называется конечный предел  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta y / \Delta x)$ , где  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  есть *приращение функции*, а  $\Delta x$  — приращение аргумента. Если в данной точке функция  $f$  имеет производную, то функция непрерывна в этой точке (см. *Непрерывная функция*). П. функции  $y = f(x)$  является функцией того же аргумента  $x$ . Для обозначения П. приняты различные символы:  $dy/dx$ ,  $df(x)/dx$  (введены Лейбницем),  $y'$ ,  $f'(x)$  (введены Ньютоном),  $Dy$ ,  $Df(x)$  (введены Коши). Последние два из этих обозначений (Коши) употреблялись сравнительно редко, но теперь вновь входят в употребление. К понятию П. приводят очень многие задачи математики, физики, техники и других наук. Приведем из них две важнейшие:

**Задача 1. об определении скорости** прямолинейно движущейся точки. Движение точки задается функцией  $s = f(t)$ , где  $s$  — положение точки (пройденный путь) в момент времени  $t$  (рис. 71). За промежуток времени  $\Delta t$  точка переместится из положения  $M$  в положение  $M_1$  и пройдет путь  $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$ . Отношение  $\Delta s / \Delta t$  выразит среднюю скорость  $v_{cp}$  за промежуток  $\Delta t$ , которая зависит от  $\Delta t$ , если точка движется неравномерно. Истинная (или мгновенная) скорость точки в момент  $t$  получится переходом к пределу:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s / \Delta t.$$

Таким образом, истинная, или мгновенная, скорость  $v$  есть П. от функции  $s = f(t)$ , т. е. П. от пути по времени.

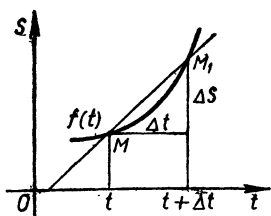


Рис. 71

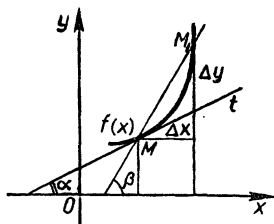


Рис. 72

Поэтому в общем случае говорят, что П. есть скорость изменения функции (по отношению к аргументу).

**Задача 2** о нахождении касательной к кривой. Пусть кривая задана уравнением  $y = f(x)$  (рис. 72). Секущая  $MM_1$  имеет угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \beta = \Delta y / \Delta x$ . Поэтому если функция  $y = f(x)$  имеет П. в точке  $x_0$ , то существует касательная к графику функции в точке  $(x_0; f(x_0))$  и

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y / \Delta x = y' = k$$

(где  $k$  — угловой коэффициент касательной). Примеры несуществования П. см. в термине *односторонняя производная*.

**ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ**, заданному единичным вектором  $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  от функции  $u = f(x, y, z)$  в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , называется конечный предел

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta s} = \frac{du}{d\vec{l}},$$

где  $\Delta s > 0$ ,  $x = x_0 + \Delta s \cdot \cos \alpha$ ,  $y = y_0 + \Delta s \cdot \cos \beta$ ,  $z = z_0 + \Delta s \cdot \cos \gamma$ . П. п. н. характеризует скорость изменения функции  $u$  в точке  $M_0$  по направлению  $\vec{l}$ ;  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  — направляющие косинусы направления  $\vec{l}$ . Если  $f(x, y, z)$  — дифференцируемая функция в точке  $M_0$ , то П. п. н. в точке  $M$  существует и равна:

$$\frac{du}{d\vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

или  $du/d\vec{l} = \vec{l} : \operatorname{grad} u$ , где  $\operatorname{grad} u$  — градиент функции  $u$ , т. е. равна проекции градиента на направление  $\vec{l}$ .

**ПРОИЗВОДНАЯ ПРОПОРЦИЯ** — пропорция, являющаяся следствием данной пропорции  $a : b = c : d$ . Так, прибавляя (или вычитая) к обеим частям равенства единицу, получим:  $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$ . Другие примеры П. п.:  $a : (a \pm b) = c : (c \pm d)$ ,  $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$  и др.

П. п. используются в тождественных преобразованиях и при решении дробно-рациональных уравнений и неравенств.

**ПРОИЗВОДНОЕ МНОЖЕСТВО** — есть совокупность всех предельных точек данного множества. Таким образом, П. м. состоит из всех тех точек множества  $M$ , которые не являются изолированными точками множества  $M$ . П. м. всегда замкнуто. См. также *Множества-теория*.

**ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.** Производная порядка  $n \geq 2$  ( $n$ -я производная) от функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  есть *производная* в точке  $x_0$  от производной порядка  $n - 1$  (наличие  $n$ -й производной в точке  $x_0$  предполагает, следовательно, существование  $(n - 1)$ -й производной в окрестности точки  $x_0$ ). Производная  $n$ -го порядка обозначается символами:

$$\frac{d^n y}{dx^n}, y^{(n)}, D^n y, \frac{d^n f(x)}{dx^n}, f^{(n)}(x), D^n f(x).$$

Таким образом,  $d^n y/dx^n = d(d^{n-1}y/dx^{n-1})/dx$ ,  $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$  и т. д. Обычную производную называют производной 1-го порядка (первой производной). Производной нулевого порядка называют саму функцию  $f(x)$ . Ускорение в прямолинейном движении  $s = f(t)$  точки есть производная от скорости и, следовательно, представляет вторую производную  $d^2s/dt^2$  от пути по времени (см. задачу 1 в термине *Производная, Вторая производная*).

Лит.: [87].

**ПРОМЕЖУТОК ОТКРЫТЫЙ** — множество всех действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих двойному неравенству  $a < x < b$  (знаки равенства исключены), где  $a$  и  $b$  — некоторые действительные числа, называемые концами П. о. Обозначение П. о. — символ  $]a; b[$ . В литературе также встречаются обозначения П. о. такие, как  $(a, b)$  (вместо «вывернутых» квадратных скобок пишутся круглые скобки, а вместо точки с запятой между концами П. о. пишется запятая).

П. о. называется также открытым числовым *отрезком* или *интервалом*.

**ПРОМІЛЛЕ (ПРОМИЛЛЬ)** числа — тысячная часть (доля) этого числа. Один П. обозначается:  $10^{-3}$ . Понятие П. — весьма близкое к понятию *процента*. П. используется при количественных оценках компонентов сплава, при вычислении пробы золота (проба золота 900, 800 и т. д. означает, что на 1000 частей сплава приходится соответственно 900 и 800 частей чистого золота), в аптекарских взвешиваниях при изготовлении того или иного лекарства. Слово П. не склоняется.

Лат. *promille* — на тысячу, за тысячу.

**ПРООБРАЗ:** 1°. П. элемента  $b \in B$  при отображении  $\varphi: A \rightarrow B$  множества  $A$  в множество  $B$  — это всякий элемент  $a \in A$  такой, что элемент  $b$  является образом элемента  $a$ , т. е.  $\varphi(a) = b$ . Множество всех прообразов для  $b \in B$  называют полным прообразом и обозначают  $\varphi^{-1}(b)$ .

В геометрии чаще всего под П. элемента понимают точку  $M$  (прямую, плоскость и др.), которая преобразуется (отображается) в точку  $M'$  (прямую, плоскость и др.).

2°. П. подмножества  $B' \subset B$  — всякое подмножество  $A' \subset A$  такое, что  $B'$  является образом множества  $A'$ , т. е.  $\varphi(A') = B'$ . Если  $A_1 \subset A$  — множество всех элементов  $a_1 \in A$  таких, что  $\varphi(a_1) \in B'$ , то  $A_1$  является полным П. множества  $B'$ . Полный П. множества  $B'$  (в частности, элемента  $b$ ) обозначается символом  $\varphi^{-1}(B')$ . В последнее время полный прообраз чаще называют просто прообразом.

**ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ** — деление какого-либо числа (или длины отрезка) на части, прямо или обратно пропорциональные данным числам (или длинам отрезков). Чтобы разделить данное число на части, пропорциональные данным числам, надо это число разделить на сумму данных чисел и полученное частное последовательно умножить на каждое из данных чисел; например, чтобы чис-

ло 60 разделить на части, пропорциональные числам 2, 4, 6, следует выполнить такие действия:

$$(60 : 12) \cdot 2 = 10; 5 \cdot 4 = 20; 5 \cdot 6 = 30.$$

Таким образом,  $10 : 20 : 30 = 2 : 4 : 6$ .

Для деления числа 60 на две части, обратно пропорциональные числам 1 и  $1/3$ , достаточно разделить число 60 на части, пропорциональные числам, обратным данным, т. е. на части, пропорциональные числам 1 и 3. Следовательно,  $60 : 4 = 15$ ;  $15 \cdot 1 = 15$ ;  $15 \cdot 3 = 45$ . Итак,  $15 : 45 = 1 : 3$ .

**ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ** — один из простейших видов *функций* (функциональной зависимости). Существуют два вида П.:

1°. П. *прямая* и 2°. П. *обратная*.

См. подробнее также: *Прямая пропорциональность*, *Обратная пропорциональность*.

**ПРОПОРЦИЯ** — равенство двух отношений  $a : b = c : d$ , где  $abcd \neq 0$ , т. е. ни одно из чисел, составляющих пропорцию, не равно нулю. Числа  $a, b, c, d$  называются членами П., причем  $a$  и  $d$  — крайними,  $b$  и  $c$  — средними членами П. Основное свойство П.: произведение крайних членов П. равно произведению средних ее членов ( $ad = bc$ ). Прибавляя (или вычитая) к обеим частям (от обеих частей) по единице и производя другие тождественные преобразования, получим новые П., называемые *производными пропорциями*. См. также: *Арифметическая пропорция*.

**ПРОСТАЯ ДРОБЬ** — то же самое, что и *обыкновенная дробь*, или дробное число. Рассматривают положительные и отрицательные П. д., т. е. положительные обыкновенные дроби и отрицательные обыкновенные дроби, изображаемые на числовой оси симметрично относительно начала отсчета (нулевой точки). Термин П. д. употребляется реже, чем *обыкновенная дробь*.

См. также: *Дробь*, *Смешанное число*, *Десятичная дробь*, *Непрерывная дробь*, *Правильная дробь*, *Неправильная дробь*, *Рациональные числа*, *Действительные числа*.

**ПРОСТАЯ ДУГА** — непрерывный и взаимно однозначный образ отрезка.

**ПРОСТОЕ ОТНОШЕНИЕ ТРЕХ ТОЧЕК**  $A, B, C$  — число  $\lambda$ , удовлетворяющее векторному равенству  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \cdot \lambda$ . Из векторного равенства следует, что П. о. т. т. рассматривается только для трех точек, лежащих на одной прямой (коллинеарных трех точек) в аффинной или евклидовой плоскости (пространстве). Обозначение П. о. т. т. прямой такое:  $[AB, C]$ , где точки  $A, B$  — базисные (основные),  $C$  — делящая точка, она делит отрезок  $AB$  в данном отношении  $\lambda$ . Встречается в литературе и такое обозначение П. о. т. т.:  $(AB, C)$ .

Иногда П. о. т. т. рассматривают как число  $\lambda = \pm \frac{|AC|}{|CB|}$ , где знак «плюс» берется в том случае, если точка  $C$  лежит между  $A$  и  $B$ , а знак «минус» берется, если точка  $C$  не принадлежит отрезку  $AB$ , но принадлежит прямой  $AB$ , т. е.  $C$  лежит вне отрезка  $AB$ , но на прямой  $AB$ .

П. о. т. т. не изменяется при параллельной *проекции* этих точек на плоскость, однако оно изменяется в *центральной проекции*.

См. также: *Сложное отношение четырех точек*, *Проективная геометрия*.

**ПРОСТОЕ ЧИСЛО** — всякое натуральное число  $p > 1$ , натуральные дели-



тели которого исчерпываются лишь двумя числами 1 и  $p$ . По определению 1 не является простым числом. Натуральные числа, отличные от 1 и не являющиеся простыми, называются *составными*. П. ч. существует бесконечно много. Этот факт был известен еще в древности. Его доказательство содержится в «Началах» Евклида. Вопрос о распределении П. ч. в натуральном ряду очень сложен. Первые фундаментальные результаты в этом вопросе были получены П. Л. Чебышевым в 1850 г.

Известны очень большие П. ч. Так, например, с помощью ЭВМ в 1965 г. было доказано, что  $2^{11213} - 1$  есть П. ч.; в его десятичной записи 3376 цифр.

Лит.: [13].

**ПРОСТРАНСТВО** — см. *Линейное пространство, Топологическое пространство, Метрическое пространство, Проективное пространство, Пространство функций*.

**ПРОСТРАНСТВО ФУНКЦИЙ**, непрерывных на отрезке, — множество всех непрерывных на отрезке  $[a; b]$  функций, рассматриваемое как *метрическое пространство*, в котором за расстояние между точками пространства, функциями  $f(x)$  и  $g(x)$  принимается максимум  $|f(x) - g(x)|$  на отрезке  $[a; b]$ , т. е.

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

П. ф. обозначается часто символом  $C(a, b)$ .

**ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ТЕОРЕМЫ** — две теоремы, условие и заключение каждой из которых являются отрицанием условия и заключения другой. Если одну из теорем записать в виде  $A \Rightarrow B$ , то другая теорема, противоположная первой, может быть записана в виде  $\neg A \Rightarrow \neg B$  или в виде  $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ , где  $\neg A$ , или  $\overline{A}$ , читается: «отрицание  $A$ », или «неверно, что  $A$ », или «не  $A$ ».

Всякая П. т. по отношению к данной эквивалентна (равносильна) *обратной теореме* по отношению к данной.

П. т. называются также взаимно противоположными аналогично тому, как перпендикулярные прямые называются также взаимно перпендикулярными. П. т., вообще говоря, не равносильны друг другу.

См. также: *Необходимое условие, Достаточное условие, Критерий*.

Лит.: [40, 80].

**ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ УГЛЫ**: 1°. П. у. выпуклого четырехугольника  $ABCD$  — углы, вершины которых не принадлежат общей стороне. Так, угол  $A$  является П. у. по отношению к углу  $C$ ; углы  $ABC$  и  $ADC$  также П. у.

Аналогично определяются П. у. для выпуклого  $n$ -угольника с четным числом вершин (четным числом сторон): П. у. выпуклого  $n$ -угольника — углы, вершины которых отделены друг от друга одинаковым числом других вершин этого  $n$ -угольника. Если выпуклый четырехугольник является вписанным, то сумма величин его П. у. равна  $180^\circ$ , или  $\pi$  (радианам). Аналогично П. у.  $n$ -угольника в евклидовой плоскости определяются П. у. в проективной плоскости (см., например, *Паскаля теорему*).

2°. П. у. выпуклого многогранника, имеющего центр симметрии, — всякие два угла, вершины которых центрально-симметричны. Так, у куба с диагональю  $[AD']$  трехгранные углы с вершинами  $A$  и  $D'$  являются П. у.

См. также: *Вертикальные углы, Противоположные числа, Противоположные теоремы.*

**ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ЧИСЛА** — два действительных числа, сумма которых равна нулю, П. ч. равны по модулю, но противоположны по знаку. На координатной прямой (числовой прямой) П. ч. изображаются точками, расположенными по разные стороны от начала отсчета (нулевой точки) и на равном расстоянии от начала отсчета. Например, числа 5 и  $-5$ ,  $\sqrt{3}$  и  $-\sqrt{3}$ ,  $a$  и  $-a$ ,  $(a + c)$  и  $-(a + c)$ .

**ПРОЦЕНТ** какого-либо числа — сотая часть этого числа. П. обозначается знаком %.

Понятие П. часто используется в хозяйственных, статистических и других расчетах для числовой характеристики и сравнения изучаемых фактов и явлений.

Если сумма  $a$  рублей положена в сберегательную кассу (банк) при условии  $p\%$  годовых ( $p$  п р о с т ы х процентов), то по истечении  $t$  лет сумма  $a$  превратится в сумму  $x$ , определяемую формулой  $x = a + \frac{pa}{100}t$ . При этом предполагается,

что по истечении каждого года  $p\%$  от первоначального взноса снимаются с текущего счета вкладчика, так что П. начисляются с первоначального вклада, а не с наращенного.

Если годовые % прибавляются к первоначальному взносу и через  $t$  лет взнос  $a$  (рублей) принимает значение  $x$  (рублей), определяемое формулой

$$x = a \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^t, \quad (*)$$

то в этом случае при каждом вычислении П. в новом году расчет ведется с наращенного взноса, т. е. с суммы, когда к первоначальному взносу прибавляется  $p\%$  годовых. Такие П. в отличие от обычных (простых) П. называются *с л о ж н ы м и* (проценты начисляются на всю сумму, включая сюда как первоначальный вклад, так и годовые П.), и сама формула (\*) называется формулой сложных П.

Лат. pro cent — за сто, на сто.

**ПРЯМАЯ** — одно из основных понятий геометрии, косвенное определение которому дается через аксиомы при дедуктивном построении курса геометрии. П. евклидовой плоскости может быть определена как множество точек, декартовы или аффинные координаты которых удовлетворяют уравнению  $ax + by + c = 0$ , где  $a$  и  $b$  не равны нулю одновременно.

См. также: *Параллельные прямые, Перпендикуляр, Аналитическая геометрия, Орицикл, Эквидистанта.*

**ПРЯМАЯ ПРИЗМА** — призма, боковые ребра которой перпендикулярны основанию. П. п. можно определить и как призму, все боковые грани которой перпендикулярны основанию.

См. также: *Призма, Многогранник.*

**ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ** — функция, задаваемая формулой  $y = kx$ , где  $k$  — не равное нулю действительное число. Число  $k$  называют коэффициентом пропорциональности. О П. п., выражаемой формулой  $y = kx$  ( $k \neq 0$ ), говорят также, что переменные  $x$  и  $y$  связаны П. п., или переменная  $y$  прямо пропорциональна (часто говорят проще: пропорциональна) переменной  $x$ .

Если функция  $x \rightarrow y$  является П. п. и  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  — пары соответственных значений переменных  $x$  и  $y$  (аргумента и функции) и  $x_2 \neq 0$ , то  $x_1/x_2 = y_1/y_2$ . Другими словами, с увеличением (уменьшением) переменной  $x$  в несколько раз соответствующее значение  $y$  увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Графиком П. п. является прямая, проходящая через начало координат.

См. также: *Обратная пропорциональность, Пропорциональное деление, Пропорция, Золотое деление.*

**ПРЯМО ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ** — переменные  $x$  и  $y$ , соответствующие значения которых связаны формулой  $y = kx$ , где  $k$  — действительное число, не равное нулю. Увеличение (уменьшение) одной из П. п. в несколько раз влечет увеличение (уменьшение) другой из переменных во столько же раз, а уменьшение одной из переменных в несколько раз влечет уменьшение другой из переменных во столько же раз. П. п. называют короче: пропорциональные переменные. В ряде книг говорят также в аналогичном смысле о П. п. величинах.

**П р и м е р ы** П. п. 1. Стоимость товара и его вес при одной и той же цене являются П. п.

2. Пройденный путь  $s$  (км/ч) и время  $t$  при равномерном движении материальной точки являются П. п.

См. также: *Прямая пропорциональность, Обратная пропорциональность, Пропорциональное деление.*

**ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ** двух множеств  $X$  и  $Y$  — третье множество  $Z$ , элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары  $(x, y)$ , где  $x \in X, y \in Y$ . Понятие П. п. часто используется во многих разделах математики. См., например, *Произведение топологическое.*

Понятие П. п. легко обобщается с двух множеств на любое конечное число множеств и на бесконечные классы множеств.

**ПРЯМОЙ КРУГОВОЙ КОНУС** — тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей один из его катетов. Длина катета, лежащего на оси вращения, называется *высотой* конуса, длина другого катета — *радиусом основания* (круга) конуса. Фигура, образованная вращением гипотенузы при этом, называется *боковой поверхностью* П. к. к. Гипотенуза (или ее длина) прямоугольного треугольника при вращении его вокруг оси, содержащей катет, называется *образующей* П. к. к.

Если П. к. к. пересечь плоскостью  $\alpha$ , проходящей через внутреннюю точку образующей и параллельной плоскости основания, то в сечении конуса получим круг с центром  $O'$ . Часть П. к. к., заключенная между плоскостью основания и секущей плоскостью, называется усеченным П. к. к. Если  $O$  — центр нижнего основания,  $O'$  — центр верхнего основания, то длина отрезка  $OO'$  — высота *усеченного конуса*; высота усеченного конуса есть расстояние между верхним и нижним основаниями конуса.

П. к. к. называют часто проще: конусом. Таким образом, конусом в школьном курсе геометрии называют ограниченное тело; конусом же в *аналитической геометрии* называют поверхность 2-го порядка, заданную определенным уравнением.

Всякое сечение конуса плоскостью, проходящей через ось его вращения, называется осевым сечением или его *канонической* (простейшей) проекцией.

При решении задач часто пользуются канонической проекцией конуса. Объем конуса определяется формулой, аналогичной формуле для объема пирамиды:  $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} HQ$ , где  $H$  — высота П. к. к.,  $Q = \pi r^2$ ,  $r$  — радиус основания.

См. также: *Коническая поверхность, Линейчатая поверхность, Тело вращения, Пирамида.*

**ПРЯМОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР** (в школьном курсе математики) — тело, образованное вращением прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону. Длина стороны прямоугольника, лежащая на оси вращения, называется высотой П. к. ц.; длина смежной стороны прямоугольника называется радиусом основания П. к. ц. Если  $H$  — высота П. к. ц., а  $R$  — радиус основания, то площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле  $S = 2\pi RH$ .

Объем П. к. ц. равен  $V = \pi R^2 H$ . Производная  $V'_R = 2\pi RH$  равна площади боковой поверхности цилиндра.

П. к. ц. часто называется проще: цилиндром.

П. к. ц. в аналитической геометрии — поверхность 2-го порядка, уравнение которой в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:  $x^2 + y^2 = r^2$ . П. к. ц. называют также проще: цилиндром или цилиндрической поверхностью.

Более подробно см.: *Цилиндр, Цилиндрическая поверхность, Поверхность 2-го порядка, Линейчатая поверхность, Линейчатая геометрия.*

**ПРЯМОЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД** — параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны основанию. Можно определить П. п. и так: П. п. — параллелепипед, все плоскости боковых граней которого перпендикулярны плоскости основания его. П. п. называется прямоугольным, если основанием его служит прямоугольник. Вокруг прямоугольного параллелепипеда всегда можно описать сферу, центр которой совпадает с центром симметрии П. п.

См. также: *Призма, Прямая призма.*

**ПРЯМОЙ УГОЛ** — угол, конгруэнтный своему смежному. Величина П. у. равна  $90^\circ$ , или  $0,5\pi$  (радианов). П. у. можно разделить циркулем и линейкой на три конгруэнтные части. В основаниях геометрии доказывается, что П. у. существует и что все П. у. конгруэнтны друг другу.

*Вписанный угол*, опирающийся на дугу окружности в  $180^\circ$  (на диаметр), прямой. Иногда величину П. у. обозначают через  $d$ .

См. также: *Трисекция угла, Трисектриса угла, Перпендикуляр.*

**ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗУЮЩИЕ** поверхности — прямые, от перемещения (движения) которых образуется поверхность, называемая *линейчатой поверхностью*. Так, на однополостном гиперболоиде и гиперболическом параболоиде расположены два семейства П. о., и через каждую точку этих поверхностей проходит пара П. о., одна из которых принадлежит одному семейству, а другая — другому.

На *конусе, цилиндре, плоскости, еликоиде* также имеются П. о. П. о. поверхности целиком, всеми своими точками лежат на этой поверхности.

**ПРЯМОУГОЛЬНИК** — параллелограмм, у которого один из углов при вершине прямой (отсюда следует, что все углы прямые). У П. диагонали конгруэнтны. П., не являющийся квадратом, имеет две оси симметрии. Вокруг всякого П. можно описать окружность, П., смежные стороны которого конгруэнтны (а следовательно, все стороны конгруэнтны); называется *квадратом*. Если смежные сторо-

ны  $\Pi$ . соизмеримы, то такой  $\Pi$ . можно разрезать (перекроить) на конгруэнтные квадраты.

**ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ФОРМУЛА** — одна из наиболее простых *квадратурных формул*, т. е. формула для приближенного вычисления определенных интегралов  $\int_a^b f(x)dx$ .  $\Pi$ . ф. имеет вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [f(\xi_0) + f(\xi_1) + \dots + f(\xi_{n-1})],$$

где  $n$  — число точек деления отрезка интегрирования  $[a; b]$  на равные части  $(b-a)/n$ . Если точки деления обозначить через  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , то  $\xi_i = (x_i + x_{i+1})/2$ .

Оценка погрешности  $\Pi$ . ф. имеет вид:

$$\frac{(b-a)^3}{24n^2} |f''(\xi)|, \text{ где } a \leq \xi \leq b.$$

Лит.: [87].

**ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ЧИСЛА** — см. *Фигурные числа*, *Многоугольные числа*.

**ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК** (в геометрии Евклида или в геометрии Лобачевского) — треугольник, имеющий прямой угол. Сторона  $c$  (или ее длина), лежащая против прямого угла, называется *гипотенузой*. Стороны (или их длины), лежащие против острых углов (или стороны, заключающие прямой угол), называются *катетами*. Если катеты  $a$  и  $b$ , гипотенуза  $c$ , то в геометрии Евклида имеет место *теорема Пифагора*:  $c^2 = a^2 + b^2$ . См. также *Пифагора числа*.

**ПСЕВДОВЕКТОР** — вектор, определенный с точностью до постоянного множителя  $\lambda = \pm 1$ . (вектор-направление).  $\Pi$ . — то же, что и *осевой вектор*, или *аксиальный вектор*.

Лит.: [72].

**ПСЕВДОГРУППА** — совокупность элементов  $G$  произвольной природы с операцией, определенной в отличие от *группы* не для всех упорядоченных пар элементов. Элементы  $\Pi$ . и операция должны удовлетворять следующим требованиям: 1) если  $a * (b * c)$  и  $(a * b) * c$  определены, то  $a * (b * c) = (a * b) * c$ ; 2) существует элемент  $e$  такой, что  $e * a = a * e$  определены и равны  $a$  при любом  $a \in G$ ; 3) для любого  $a$  существует элемент  $a^{-1}$  такой, что  $aa^{-1}$  определено и равно  $e$ . Любая группа есть в то же время  $\Pi$ .

**Пример:** совокупность преобразований вида

$$x' = \frac{a_0 + a_1x + a_2y}{b_0 + b_1x + b_2y}, \quad y' = \frac{c_0 + c_1x + c_2y}{d_0 + d_1x + d_2y}, \quad \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \neq 0,$$

где  $D(x', y') / D(x, y)$  означает *якобиан* преобразования, образует  $\Pi$ . относительно *суперпозиций* этих преобразований. Эта  $\Pi$ . не является группой.

**ПСЕВДОСКАЛЯР** — число, отнесенное к некоторой системе координат и меняющее знак на противоположный при переходе к другой системе координат, если *якобиан* перехода отрицателен. Примером  $\Pi$ . может служить смешанное про-

изведение базисных векторов евклидова пространства, элемент площади поверхности и др.

Лит.: [68].

**ПСЕВДОСФЕРА** — поверхность, образованная вращением *трактрисы* вокруг ее асимптоты (базы) (рис. 73). Название П. связано с тем, что ее полная (гауссова) *кривизна* постоянна и отрицательна:  $k = -1/a^2$ , где  $a$  — длина отрезка касательной, заключенного между точкой касания к трактрисе и ее базой, в то время как полная кривизна сферы  $S^2$  радиуса  $R$  постоянна и положительна:  $k = 1/R^2$ .

Важность П. состоит в том, что на ней частично реализуется плоская неевклидова геометрия Лобачевского; этот факт был установлен уже после смерти Лобачевского итальянским геометром Бельтрами в 1868 г., что положило конец спорам о реальности геометрии Лобачевского.

В более общем понимании П. называется поверхность постоянной отрицательной кривизны, на которой установлено движение в достаточно малой окрестности (куске) ее. При этом роль прямых линий на П. играют *геодезические линии*, так что через каждую точку поверхности проходит только одна геодезическая линия.

Греч.  $\psi\epsilon\omicron\delta\eta\varsigma$  — ложный, ложь; *псевдосфера* — ложная сфера.

**ПТОЛЕМЕЯ ТЕОРЕМА** — теорема планиметрии Евклида, устанавливающая зависимость между сторонами и диагоналями (их длинами) четырехугольника, вписанного в окружность: во всяком выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон (рис. 74), т. е. для вписанного в окружность четырехугольника имеет место равенство

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

П. т. названа по имени древнегреческого ученого Птолемея Клавдия, жившего в I—II вв. П. т. была помещена в крупнейшем произведении Птолемея Клавдия, называвшемся «Великое собрание»; более известно арабизированное название этого труда «Алмагест». «Алмагест» был в основном посвящен астрономии, но в этом труде были изложены некоторые вопросы тригонометрии (таблицы синуса, формулы косинуса и синуса суммы двух углов) — плоской и сферической и теоремы геометрии.

П. т. используется при решении геометрических задач, а также при выводе некоторых частного вида формул (теорем) сложения в тригонометрии (синус и косинус суммы и разности двух углов), когда одна из сторон вписанного угла проходит через центр окружности.

Лит.: [60, 63, 81].

**ПУАССОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** — важный частный случай распределения случайной величины  $\xi$ , принимающей значения  $0, 1, 2, \dots, n$ . Значение  $k$  принимается с вероятностью  $P_k(\lambda) = (\lambda^k / k!)e^{-\lambda}$ , здесь  $\lambda$  — параметр. Математическое ожидание и дисперсия  $\xi$  равны  $\lambda$ . П. р. возникло из следующей задачи: имеется  $n$  равновероятных событий (вероятности  $\lambda/n$ ); какова вероят-

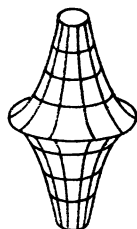


Рис. 73

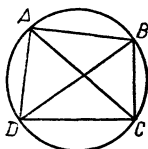


Рис. 74

ность того, что наступит ровно  $k$  из рассматриваемых событий. Оказывается, что при больших  $n$  эта вероятность приближенно равна  $P_k(\lambda)$ .

**ПУАССОНА ТЕОРЕМА** — теорема, утверждающая, что если имеется  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события  $A$  равна  $p$ , где  $p$  мало, а  $n$  велико, то вероятность того, что событие  $A$  произошло ровно  $m$  раз, приближенно равна  $(\lambda^m : m!)e^{-\lambda}$ , где  $\lambda = np$  (см. также *Пуассона распределение*).

**ПУСТОЕ МНОЖЕСТВО** — множество, не содержащее ни одного элемента. Введение П. м. в математику весьма удобно. П. м. является *подмножеством* любого множества. Если два множества не имеют общих элементов, то говорят, что их *пересечение* является П. м.

**П р и м е р.** Множество действительных корней квадратного уравнения  $x^2 + 3 = 0$  является П. м. П. м. обозначается символом  $\emptyset$ .

**ПУЧОК** линий или поверхностей — семейство соответственно линий на плоскости или поверхностей в пространстве, линейно зависящее от одного параметра.

Часто рассматривают следующую конструкцию П. Пусть  $F_1(x, y) = 0$  и  $F_2(x, y) = 0$  — уравнения плоских линий. Тогда уравнение  $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$ , где параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  не равны нулю одновременно, есть уравнение П. линий; это уравнение фактически зависит от одного параметра ( $\lambda_1 : \lambda_2$ ).

Аналогично записывается П. поверхностей в пространстве. Линии  $F_1(x, y) = 0$  и  $F_2(x, y) = 0$  называются *о б р а з у ю щ и м и* П. Множество точек пересечения каждой двух линий П. называется *н о с и т е л е м* П. (для П. прямых эта точка называется также *ц е н т р о м* П.). Носитель П. плоских линий может состоять как из действительных, так и из мнимых точек П. См. также: *Пучок окружностей*, *Пучок плоскостей*, *Пучок сфер*.

Лит.: [1, 63].

**ПУЧОК ОКРУЖНОСТЕЙ** — пучок плоских линий, образующими которых являются окружности. Или иначе: П. о. есть семейство окружностей, лежащих в одной плоскости и проходящих через две точки, которые могут быть действительными (различными или совпадающими) или мнимыми. Соответственно с этим и П. о. называется эллиптическим, параболическим или гиперболическим. Существует бесконечное множество окружностей, ортогональных ко всем окружностям П. о. Это множество окружностей само образует П. о., который называется П. о., сопряженным данному. Эллиптический П. о. сопряжен с гиперболическим, параболический — с параболическим. Понятие П. о. используется при изучении радикальной оси и при решении задач на *геометрические построения*. П. о. можно также определить как множество окружностей, общих двум *связкам окружностей*, лежащим в одной плоскости.

См. также: *Инверсия*.

Лит. [1, 63].

**ПУЧОК ПЛОСКОСТЕЙ** — множество плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую — *о с ь* П. п. или параллельных некоторой плоскости (П. п. с несобственной осью). Если ось П. п. задана в виде пересечения двух плоскостей (не параллельных):

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \quad (F_1 = 0), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \quad (F_2 = 0), \end{aligned}$$

то П. п. (и любая его плоскость) может быть определен уравнением  $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  одновременно не равны нулю. Плоскости  $F_1 = 0$  и  $F_2 = 0$  называются образующими П. п. П. п. линейно зависит от одного параметра (отношения  $\lambda_1 : \lambda_2$ ). Понятие П. п. довольно часто используется при решении задач по геометрии (аналитической и элементарной).

См. также: *Инверсия, Пучок, Геометрия.*

**ПУЧОК ПРЯМЫХ** — множество прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих через одну и ту же точку  $S$  или параллельных одной и той же прямой. Точка  $S$  называется центром или носителем П. п. Если  $(x_1, y_1)$  — центр П. п., то уравнение прямых пучка будет иметь вид:  $A(x - x_1) = B(y - y_1)$ ,  $B \neq 0$ . Если П. п. задан парой прямых:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то уравнение прямых пучка (уравнение П. п.) будет иметь вид:

$$\lambda_1 (A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2 (A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

П. п. представляет собой однопараметрическое семейство прямых, линейно зависящих от параметра ( $t = \lambda_1 : \lambda_2$ ).

См. также: *Пучок окружностей, Инверсия.*

**ПУЧОК СФЕР** — семейство сфер, линейно зависящих от одного параметра. Всякая пара сфер П. с. пересекается по некоторой окружности действительного, нулевого или мнимого радиуса. В соответствии с этим П. с. называется эллиптическим, параболическим или гиперболическим. П. с. есть пространственный аналог пучка окружностей.

См. также: *Пучок, Пучок плоскостей, Инверсия.*

**ПФАФФА УРАВНЕНИЕ** — уравнение вида:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n = 0,$$

где  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — функции переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Это уравнение названо по имени немецкого ученого математика Пфаффа, учителя Гаусса. П. у. равносильно некоторой системе уравнений в частных производных. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, произвол общего решения П. у., вообще говоря, не определяется несколькими произвольными постоянными. Этот произвол характеризуется несколькими функциями определенного числа переменных; количество таких функций и количество их переменных определяются характеристиками П. у. В самом простом случае решение П. у. имеет вид:

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C.$$

Такое уравнение называется вполне интегрируемым. Критерием полной интегрируемости являются равенства:

$$\partial X_i / \partial x_j = \partial X_j / \partial x_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Теория П. у., а также теория систем П. у. играют большую роль в механике неголономных систем и термодинамике. Системы П. у. систематически использовались в трудах французского геометра Э. Картана, создавшего мощный метод в многомерной дифференциальной геометрии.

Лит.: [72].



# Р

**РАВЕНСТВО** — бинарное отношение на множестве  $A$ , являющееся отношением эквивалентности, в каждом классе эквивалентности содержится лишь по одному элементу. Обозначение  $P$  символом « $=$ » является общепринятым в математике. Если элемент  $a$  множества  $A$  находится в отношении  $P$  к элементу  $b$  того же множества, то пишут:  $a = b$  (если же элементы  $a$  и  $b$  находятся в отношении  $R$ , то пишут:  $aRb$ ). Если  $a = b$ , то это означает, что элемент  $b$  есть тот же самый элемент, что и  $a$ .

Отношение  $P$  над множеством  $A$  называется также *диагональю*.  $P$  играет роль нейтрального элемента (роль единицы) для композиции отношений над множеством  $A$ . Бинарные отношения над множеством  $A$  образуют *полугруппу* с единицей.

Запись  $1/2 = 3/6$  означает, что число  $1/2$  находится в отношении  $P$  к числу  $3/6$ . Запись  $f(x) = 0$  является высказывательной формой, а не высказыванием, следовательно, не является отношением  $P$ .

См. также: *Конгруэнтность, Параллельность, Подобие, Равновеликость, Декартово произведение, Сравнение*.

Лит.: [36].

**РАВЕНСТВО МНОГОЧЛЕНОВ**. Два многочлена над коммутативным, ассоциативным кольцом  $K$  по определению считаются равными, если их канонические представления (см. *Каноническое представление многочлена*) таковы, что для всякого члена в представлении одного из них найдется подобный член с равным коэффициентом в представлении другого многочлена. Разность равных многочленов является *нуль-многочленом*.

**РАВЕНСТВО МНОЖЕСТВ**. Два множества  $A$  и  $B$  равны (символически  $A = B$ ), если множество  $A$  является подмножеством в множестве  $B$  и, обратно, множество  $B$  является подмножеством в множестве  $A$ , т. е. если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ .

**РАВНОБЕДРЕННАЯ ТРАПЕЦИЯ** — трапеция, у которой боковые стороны конгруэнтны.  $P$ . т. называется также *равнобокой*. Углы при основании  $P$ . т. конгруэнтны. Вокруг всякой  $P$ . т. можно описать окружность.  $P$ . т. имеет ось симметрии. Сумма величин углов при боковой стороне  $P$ . т. равна  $180^\circ$ . Если средняя линия  $P$ . т. (ее длина) равна боковой стороне  $P$ . т., то в такую трапецию можно вписать окружность. Диагонали  $P$ . т. конгруэнтны.

См. также: *Равнобедренный треугольник*.

**РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК** — треугольник, две стороны которого конгруэнтны. Конгруэнтные стороны  $P$ . т. называют боковыми сторо-

нами, а третью сторону — о с н о в а н и е м. Р. т. имеет по крайней мере одну ось симметрии. Углы при основании Р. т. конгруэнтны, следовательно, по величине равны. Высота Р. т., проведенная из его вершины на основание, одновременно является медианой и биссектрисой Р. т. Р. т. также называется равнобочным. Если боковая сторона равна основанию, то Р. т. называется р а в н о с т о р о н н и м.

См. также: *Равнобедренная трапеция, Равносторонняя гипербола.*

**РАВНОБОЧНАЯ ГИПЕРБОЛА** — синоним термина *Равносторонняя гипербола.*

**РАВНОБОЧНАЯ ТРАПЕЦИЯ** — синоним термина *Равнобедренная трапеция.*

**РАВНОВЕЛИКИЕ ФИГУРЫ** — плоские фигуры, имеющие равные площади, или пространственные фигуры (тела), имеющие равные объемы. Всякие два простых (без самопересечений) равновеликих многоугольника являются и равноставленными (теорема Бойаи — Гервина); два равновеликих многогранника, вообще говоря, не будут равноставлены (теорема Дена — Кагана). Другими словами, равновеликие многоугольники можно перекроить, т. е. разрезать каждый из них на такие части, из которых можно составить другой многоугольник.

См. также: *Гильберта проблемы, Конгруэнтные фигуры.*

Лит.: [1, 63].

**РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ:** 1°. Р. с. последовательности функций  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  на данном множестве к функции  $\Phi$  означает, что для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $N(\varepsilon)$  такое, что при всех  $n > N$  выполняется неравенство

$$|f_n - \Phi| < \varepsilon$$

при любых  $x$  из данного множества. Так, например, последовательность функций  $y_n = x^n$  на любом отрезке  $[0; 1 - \varepsilon]$  ( $\varepsilon > 0$ ) сходится равномерно к нулю (нуль-функция). Последовательность функций может сходиться равномерно на одном множестве и сходиться неравномерно на другом.

Рассмотренная последовательность функций на отрезке  $[0; 1]$  сходится, но неравномерно. Во многих задачах анализа применяется теорема, использующая понятие Р. с.: если ряд  $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$  равномерно сходится к  $\Phi$  на промежутке  $[a; b]$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(x) dx$  равномерно сходится к  $\int_a^x \Phi(x) dx$  для любого  $x \in ]a; b[$ .

2°. Р. с. несобственного интеграла, зависящего от параметра. Говорят, что  $\int_0^{\infty} f(x, \lambda) dx$  сходится равномерно к  $\Phi(\lambda)$ , если для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $N(\varepsilon)$  такое, что при всех  $\alpha > N(\varepsilon)$  выполняется неравенство

$$\left| \int_0^{\alpha} f(x, \lambda) dx - \Phi(\lambda) \right| < \varepsilon$$

при любых значениях  $\lambda$ . Р. с. интеграла дает возможность менять порядок интегрирования у несобственных двойных интегралов.

Лит.: [87].

**РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ:** 1°. Р. н. ф. от одной переменной. Функция  $f$  называется Р. н. ф. на отрезке  $[a; b]$  (интервале, множестве), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для любых значений  $x_1$  и  $x_2$  из отрезка (интервала, множества), отстоящих друг от друга меньше чем на  $\delta > 0$  ( $|x_2 - x_1| < \delta$ ), выполняется неравенство

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Р. н. ф. на отрезке (интервале, множестве) непрерывна на этом отрезке (интервале, множестве). Функция, непрерывная на отрезке, является Р. н. ф. на этом отрезке; для интервала  $]a; b[$  это утверждение может быть неверным, например  $y = \operatorname{tg} x$  непрерывна на интервале  $]0; 0,5\pi[$ , но не является Р. н. ф. на этом интервале.

2°. Р. н. ф. от нескольких переменных.  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(P)$  называется Р. н. ф. на множестве  $E$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всех точек  $P_1$  и  $P_2$ ,  $\rho(P_1, P_2) < \delta$  выполняется неравенство  $|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$ , где  $\rho(P_1, P_2)$  обозначает расстояние между точками  $P_1$  и  $P_2$  в  $n$ -мерном пространстве.

Если функция  $u = f(P)$  непрерывна в замкнутой ограниченной области  $E$ , то она является Р. н. ф. в этой области. Справедлива теорема: функция, непрерывная в каждой точке компактного множества, является Р. н. ф. на этом множестве. Для некомпактных множеств такая теорема неверна. См. *Компактные множества*.

Лит.: [87].

**РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ** — приближение функции  $\Phi$  функциями  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ , когда за меру уклонения  $f_i$  от  $\Phi$  взята верхняя грань модуля разности

$$\rho(f_i, \Phi) = \sup_{x \in \Omega} |\Phi - f_i|,$$

где  $\Omega$  — множество чисел, на котором производится приближение.

Если  $\Phi$  и  $f_i$  ( $i \in N$ ) непрерывны, а  $\Omega$  компактно, то знак верхней грани можно заменить знаком максимума.

**РАВНОМОЩНЫЕ МНОЖЕСТВА** — то же, что и *эквивалентные множества*.

**РАВНОСИЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ** — уравнения, имеющие одно и то же множество корней (решений).

Пр и м е р ы. 1)  $x^2 - 4 = 0$  и  $|x| = 2$  — Р. у., так как они имеют одни и те же корни (решения)  $x_1 = 2, x_2 = -2$ ; 2)  $(x - 1)^2 = 0, x - 1 = 0$  — Р. у.: множество решений этих уравнений совпадает.

Р. у. называются также *эквивалентными*. Отношение равносильности уравнений является отношением эквивалентности на множестве уравнений, рассматриваемых над одним и тем же полем.

Аналогично определяется и равносильность систем уравнений: системы уравнений называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений. Например, системы уравнений  $x - y = 5, x + y = 7$  и  $x - 2y = 4, x = 6$  являются равносильными, так как они имеют одно и то же решение:  $x_1 = 6, y_1 = 1$ .

См. также: *Уравнение, Функциональное уравнение, Дифференциальные уравнения*.

Лит.: [60, 95].

**РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ** семейства функций — важное свойство некоторых семейств функций. Семейство функций  $\{f_n\}$  равностепенно непрерывно, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при любых  $x_1$  и  $x_2, |x_1 - x_2| < \delta$  неравенства  $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon$  выполняются для всех функций  $f_n$ . В *Арцелла теореме* о равномерной сходимости используется свойство Р. н.

**РАВНОСТОРОННИЙ КОНУС** — *прямой круговой конус*, образующая которого конгруэнтна диаметру основания. Плоскость, проходящая через ось вращения (высоту)  $P. к.$ , пересекает его по равностороннему треугольнику. Всякий равносторонний треугольник может быть принят за каноническую проекцию  $P. к.$

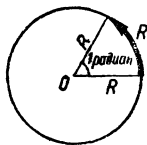


Рис. 75

См. также: *Равносторонний цилиндр.*

**РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК** — треугольник, у которого все стороны конгруэнтны.  $P. т.$  — один из простейших видов правильных многоугольников.  $P. т.$  имеет три оси симметрии и центр симметрии третьего порядка.

Точка пересечения осей симметрии  $P. т.$  является одновременно *центром* (центром тяжести), *ортоцентром*, центром вписанной и описанной окружностей.  $P. т.$  называется также равноугольным или правильным треугольником.  $P. т.$  является частным случаем *равнобедренного треугольника*. Площадь  $P. т.$  со стороной  $a$  равна:  $S = a^2 \sqrt{3}/4$  (кв. ед.).

См. также: *Сферический треугольник.*

**РАВНОСТОРОННИЙ ЦИЛИНДР** — *прямой круговой цилиндр*, высота которого конгруэнтна диаметру его основания. Плоскость, проходящая через ось вращения  $P. ц.$ , пересекает его по квадрату.

Вокруг  $P. ц.$  можно описать сферу и в него можно вписать также сферу.

См. также: *Равносторонний конус.*

**РАВНОСТОРОННЯЯ ГИПЕРБОЛА** — гипербола, у которой действительная и мнимая оси равны. Простейшее уравнение  $P. г.$  в прямоугольных координатах имеет вид:  $x^2 - y^2 = a^2$ , где  $a$  — действительная и мнимая полуось. *Асимптоты*  $P. г.$  взаимно перпендикулярны. Если за оси координат принять асимптоты  $P. г.$ , то ее уравнение будет иметь вид:  $y = k : x$ . График обратной пропорциональной зависимости, изучаемой в курсе элементарной алгебры, есть  $P. г.$   $P. г.$  иначе называют равнобочной гиперболой.

**РАДИАН** — величина центрального угла, опирающегося на дугу окружности, длина которой равна радиусу (рис. 75). Если величина полного угла равна  $360^\circ$ , соответствует длине всей окружности  $2\pi R$ , то один радиан содержит  $(360 : 2\pi)^\circ = 57^\circ 17' 45''$  с точностью до  $1''$  или с точностью до  $0,1$  градуса,  $1$  радиан  $= 57,3^\circ$ . Таким образом, имеем:  $90^\circ = \pi/2$  радианам,  $180^\circ = \pi$  радианам,  $360^\circ = 2\pi$  радианам и т. д.

При переводе градусной меры угла в радианную и обратно используется соотношение

$$180 : \pi = n : \alpha,$$

где  $\alpha$  — радианная, а  $n$  — градусная мера одного и того же угла (дуги окружности). Если  $l$  — длина дуги,  $\alpha$  — радианная мера ее (или угла, соответствующего этой дуге),  $R$  — радиус окружности, то имеет место формула  $l = \alpha R$ . Если  $\alpha = 1$  (слово «радиан» часто опускается или сокращается до рад), то длина дуги в один радиан равна радиусу:  $l = R$ ; если же измерить длину дуги в один градус, то она будет равна  $l = (\pi/180)R$ .

**РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА.** Пусть  $\angle AOB$  — данный угол и окружность с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$  (рис. 76) пересекает стороны угла в точках  $A$

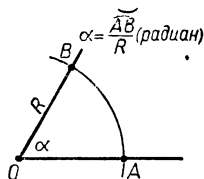


Рис. 76

и  $B$ . Тогда число, равное отношению длины дуги  $AB$  окружности ( $0; R$ ) к длине ее радиуса, называется  $P. м. у.$

При этом, если величина угла больше  $360^\circ$ , т. е.  $\widehat{AOB} = 360^\circ \cdot n + \alpha_0$ , где  $0^\circ < \alpha_0 < 360^\circ$ , то за  $P. м. у. \alpha$  принимают  $2\pi n + P. м. у. \alpha_0$ . За единицу измерения  $P. м. у.$  принят один *радиан*.  $P. м. у.$  играет большую роль в вопросах высшей математики, в частности в математическом анализе, так как, используя понятие  $P. м. у.$ , ряд

формул в математике (вычисление производной тригонометрической функции, изложение тригонометрической функции в степенной ряд и др.) упрощается.

$P. м. у.$  называется также радианной мерой дуги окружности.

См. также: *Градус, Величина, Длина*.

**РАДИКАЛ**:  $1^\circ$ .  $P.$  — математический знак  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ , обозначающий операцию извлечения арифметического корня  $n$ -й степени ( $n$  — натуральное число) из какого-либо числа; если это число  $a$ , то пишут:  $\sqrt[n]{a}$ . Для нечетного натурального показателя иногда пишут:  $\sqrt[3]{-27} = -3$ .

Лат. *radix* — корень.

$2^\circ$ .  $P. кольца R$  с единицей (правый или левый  $P.$ ) — правый (левый) *идеал* кольца, являющийся пересечением всех его максимальных правых (левых) идеалов.  $P. кольца R$  обозначается через *rad*  $R$ . Часто  $P. кольца R$  называют радикалом Джекобсона.

**РАДИУС** окружности (сферы) — отрезок, соединяющий любую ее точку с центром.  $P.$  также называют и длину этого отрезка.  $P. окружности$  (сферы) также называют  $P. круга$  (шара), границей которого служит данная окружность (сфера).

Лат. *radius* — спица колеса, луч.

**РАДИУС КРИВИЗНЫ** — радиус *круга кривизны* в данной точке кривой. Лит.: [61, 71].

**РАДИУС СХОДИМОСТИ** — радиус круга сходимости *степенного ряда* — такое число  $r$ , что степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  сходится при  $|z| < r$  и расходится при  $|z| > r$  ( $z \in \mathbb{C}$ ). Для определения радиуса сходимости существует несколько формул, например формула Даламбера:

$$r = 1/\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n|$$

или формула Коши:

$$r = 1/\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Лит.: [56, 87].

**РАДИУС-ВЕКТОР ТОЧКИ**  $M$  плоскости (пространства) — вектор, начало которого совпадает с некоторой фиксированной точкой  $O$  плоскости (пространства), а конец — с точкой  $M$ . Точка  $O$  обычно является полюсом полярной системы координат или началом декартовой прямоугольной системы координат.

**РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВА**  $A$  на непересекающиеся подмножества — это такая совокупность подмножеств  $A_\alpha \subset A$  ( $\alpha$  пробегает некоторое множество ин-

дексов  $\mathfrak{M}$ ), что  $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$  при  $\alpha \neq \beta \in \mathfrak{M}$  и  $\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{M}} A_\alpha = A$ . Р. м. является *бинарным отношением* на множестве  $A$ . Поэтому можно говорить о *подразбиениях, пересечении и объединении* Р. м. Множество всех Р. м. образует *структуру* (решетку).

Лит.: [48, 55].

**РАЗВЕРНУТЫЙ УГОЛ** — угол, величина которого равна  $180^\circ$ , или  $\pi$  радианам. Стороны Р. у. составляют одну прямую. Множество точек Р. у. есть полуплоскость, граница которой есть объединение сторон Р. у. Р. у. иначе называют *выпрямленным углом*.

**РАЗВЕРТКА:** 1°. Р. кривой — отрезок прямой, длина которого равна длине этой кривой. Разыскание такого отрезка называется *спрямлением* или *ректификацией* кривой. Иногда под Р. кривой понимают ее *эвольвенту*.

2°. Р. многогранника — многоугольник, представляющий собой объединение других многоугольников, конгруэнтных граням данного многогранника и для которых может быть указан порядок склеивания по сторонам и вершинам с тем, чтобы получить данный многогранник. Р. многогранника определяется неоднозначным образом. Р. м. — плоская модель, из которой можно склеить определенный или заранее указанный многогранник.

3°. Р. поверхности, допускающей *изгибание*, — множество плоских фигур, которые изометричны кускам данной поверхности и из которых можно склеить эту поверхность. Например, Р. боковой поверхности прямого кругового конуса есть круговой сектор; Р. боковой поверхности прямого кругового цилиндра есть прямоугольник.

Понятие Р. используется в школьном курсе геометрии, в черчении, топологии и в геометрии выпуклых поверхностей.

Лит.: [2].

**РАЗВЕРТЫВАЮЩАЯСЯ ПОВЕРХНОСТЬ** — поверхность, которая при помощи изгибания может быть наложена (развернута) на плоскость. Всякая Р. п. линейчатая, полная кривизна Р. п. равна нулю.

См. также: *Ребро возврата*.

Лит.: [61, 71].

**РАЗВЕТВЛЕНИЯ ТОЧКА** многозначной аналитической функции  $f(z)$  — точка, обход вокруг которой в комплексной области по окружности любого сколь угодно малого радиуса с центром в этой точке и так, что данная функция изменяется непрерывно, приводит к значениям, не совпадающим с первоначально выбранными. Например, для функций  $\sqrt{z-1}$  и  $\ln(z-1)$  точка  $z=1$  является Р. т. При однократном обходе вокруг нее значение первой функции меняет знак, а значение второй функции приобретает слагаемое  $\pm 2\pi i$ . Р. т. называется также *точкой ветвления*.

Лит.: [56].

**РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ** — отношения разностей значений некоторой функции к разностям соответствующих значений аргумента. Р. р. используются при интерполировании и приближенных вычислениях, когда значения функций рассматриваются при неравноотстоящих друг от друга значениях аргумента. Иногда говорят «разностные отношения». См. *Исчисление конечных разностей*.

**РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ** — тождественное преобразование многочлена в произведение нескольких множителей. Р. м. н. м. производят в основном следующими способами:

1) вынесение общего множителя за скобки, например:

$$a^4b^2 - a^2b = a^2b(a^2b - 1);$$

2) использование формул сокращенного умножения, например:

$$8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1);$$

3) группировка слагаемых (одночленов), например:

$$a^2 + a + b - b^2 = a^2 - b^2 + a + b = (a + b)(a - b) + a + b = (a + b) \times (a - b + 1);$$

4) разбиение слагаемых, например:

$$c^2 + 12c + 32 = c^2 + 8c + 16 + 4c + 16 = (c + 4)^2 + 4(c + 4) = (c + 4)(c + 8).$$

Р. м. н. м. используется часто при решении уравнений и неравенств, а также при вычислениях и других задачах.

Всякий многочлен  $f$  с комплексными коэффициентами разлагается в поле комплексных чисел на линейные множители:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — корни многочлена. Многочлены с действительными коэффициентами разлагаются на множители первой и второй степени с действительными коэффициентами. Однако существуют многочлены с рациональными коэффициентами, не разлагающиеся на рациональные множители (см. *Неприводимый многочлен*). Р. м. н. м. называется также разложением *полинома* на множители.

См. также: *Гаусса лемма*, *Неприводимое уравнение*. Лит.: [42, 45, 95].

**РАЗМЕРНОСТЬ** геометрической фигуры — число, равное единице, если фигура есть линия, равное двум, если фигура есть поверхность, равное трем, если фигура есть тело. Общее определение Р. любого замкнутого множества, лежащего в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, было дано советским математиком П. С. Урысоном, который построил теорию Р. — одну из глубоких теорий современной топологии. Р. иначе называется *числом измерения*.

**РАЗМЕЩЕНИЕ** — одно из понятий *комбинаторики*. Р. из  $n$  элементов по  $k$  называется всякое линейно упорядоченное подмножество, состоящее из  $k$  элементов множества из  $n$  элементов. Два Р. считаются различными, если они различаются либо составом элементов, либо порядком элементов. Число различных Р. из  $n$  элементов по  $k$  обозначается символом  $A_n^k$  ( $A$  — начальная буква французского слова *arrangement* — размещение). Число Р.  $A_n^k = n! / (n - k)!$  связано с числом сочетаний  $C_n^k$  соотношением  $A_n^k = k! C_n^k$ .

**Пример.** Сколько существует трехзначных чисел, записываемых нечетными цифрами: 1, 3, 5, 7, 9 и в записи каждого из которых участвуют различные неповторяющиеся цифры?

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5 - 3)!} = \frac{5!}{2!} = 60.$$

**РАЗМЕЩЕНИЕ С ПОВТОРЕНИЯМИ** из  $n$  элементов множества  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  по  $k$  — всякая конечная последовательность, состоящая из  $k$  членов,

причем члены ее являются элементами рассматриваемого множества  $M$ . Два  $P$ . с п.  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$  и  $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}$  считаются различными, если хотя бы на одном месте они имеют различные элементы множества  $M$ , т. е. если хотя бы для одного  $r$  ( $1 \leq r \leq k$ ) справедливо неравенство  $a_{i_r} \neq a_{j_r}$ . Число различных  $P$ . с п. из  $n$  элементов по  $k$  равно  $n^k$ . Если в некотором  $P$ . с п. элемент  $a_i$  встречается на  $p$  и только на  $p$  местах, то говорят, что  $a_i$  повторяется в рассматриваемом  $P$ . с п.  $p$  раз.

**РАЗНОСТЬ** — результат вычитания: 1°.  $P$ . двух чисел  $a$  и  $b$  (уменьшаемого  $a$  и вычитаемого  $b$ ) — такое третье число  $c = a - b$ , что его сумма с числом  $b$  равна  $a$ , т. е.  $c + b = a$ .

2°.  $P$ . двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — такой вектор  $\vec{c}$ , что сумма его с вектором  $\vec{b}$  равна вектору  $\vec{a}$ , т. е.  $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ . Графически векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют треугольник.

См. также: *Разность арифметической прогрессии, Разность множеств, Вектор, Векторное исчисление.*

**РАЗНОСТЬ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ** — постоянное число  $d$ , прибавляя которое к любому члену *арифметической прогрессии* получаем следующий член этой прогрессии. Иными словами,  $P$ . а. п. есть результат вычитания любого предыдущего члена из следующего за ним.

См. также: *Геометрическая прогрессия, Арифметическая прогрессия, Арифметический ряд.*

**РАЗНОСТЬ МНОЖЕСТВ**  $A$  и  $B$  — множество всех тех элементов множества  $A$ , которые не входят в множество  $B$ .  $P$ . м.  $A$  и  $B$  обозначается символом  $A \setminus B$  (или символом  $A - B$  или  $A \div B$ ). Иногда термин  $P$ . м. применяют лишь к случаю, когда  $B$  является подмножеством множества  $A$ .  $P$ . м. является *пустым множеством* тогда и только тогда, когда  $A$  является подмножеством  $B$ , т. е.  $A \subset B$ .

$P$ . м. является одной из теоретико-множественных операций.

**Пр и м е р.** Пусть  $A$  — множество всех треугольников и  $B$  — множество прямоугольных треугольников, тогда  $A \setminus B$  — множество косоугольных треугольников, т. е. треугольников, у которых ни один угол не является прямым.

**РАЗРЫВА ТОЧКА** — значение аргумента, при котором данная функция разрывна (см. *Разрывная функция*).  $P$ . т. разделяются на два рода.  $P$ . т. первого рода называется *точка a*, в которой существует левый и правый предел, т. е.:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x). \quad (*)$$

Когда эти пределы равны между собой, тогда функция  $f(x)$  может быть сделана непрерывной при  $x = a$ , если положить:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

(устранимый разрыв).  $P$ . т. второго рода характеризуется тем, что по крайней мере один из пределов (\*) не существует (например, равен  $\pm \infty$ ).

Еще более сложным видом  $P$ . т. являются точки разрыва, такие, что один из пределов (\*) не существует и не равен бесконечности, как, например, у функции  $y = \sin(1/x)$  в точке  $x = 0$ .

Лит.: [87].



**РАЗРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ** — функция, которая хотя бы при одном значении аргумента не является непрерывной (см. *Непрерывная функция*). Р. ф. относится к классам Бэра, начиная с первого. Например,  $y = \cos(1/x)$  разрывна в точке  $x = 0$ , функция Дирихле разрывна в каждой точке.

Лит.: [87].

**РАЗРЯД** в арифметике — место, занимаемое цифрой при написании числа в позиционной системе счисления. В десятичной системе счисления цифры 1-го разряда — единицы, цифры 2-го разряда — десятки и т. д., считая цифры числа справа налево.

См. также: *Класс*.

**РАНГ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ** — ранг матрицы этой квадратичной формы (см. *Матрица квадратичной формы*).

**РАНГ МАТРИЦЫ** — наивысший порядок *минора* этой матрицы (таблицы), отличного от нуля; это означает, что если ранг матрицы равен  $k$ , то среди миноров порядка  $k$  этой матрицы есть по крайней мере один отличный от нуля, но все миноры матрицы порядка  $k + 1$  и более высокого равны нулю. Рассмотрим, например, матрицу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix},$$

содержащую три строки и четыре столбца. Вычеркивая строки и столбцы так, чтобы число остающихся строк и столбцов было одинаково, составляем из оставшихся строк и столбцов определители разных порядков этой матрицы. Все определители 3-го порядка, полученные таким путем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix},$$

как легко видеть, равны нулю. Среди определителей 2-го порядка есть отличные от нуля, например:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, ранг рассматриваемой матрицы равен 2. Справедлива теорема: Р. м. равен максимальному числу линейно независимых строк матрицы, а также максимальному числу линейно независимых столбцов. Понятие Р. м. часто используется в линейной алгебре (см., например, *Кронекера — Капелли теорему*).

Лит.: [47].

**РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ.** При формальной подстановке  $x_0$  вместо аргумента в функции, стоящей под знаком предела, и при дальнейших вычислениях часто приходят к числовым выражениям типа:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, \infty - \infty, 1^\infty,$$

которые, взятые отдельно, лишены математического смысла. Однако при значениях аргумента, близких к рассматриваемому, функция может иметь вполне опре-

деленные значения. Поэтому естественно считать, что при  $x = x_0$  функция принимает такое значение, которое мало отличается от соседних. Строго говоря, мы полагаем:

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad (*)$$

если, конечно, такой предел существует.

Р. н. заключается в вычислении истинного значения предела (\*). Все неопределенности путем несложного преобразования приводят к неопределенности типа 0/0. При Р. н. этого типа используется *Лопиталья правило*. См. также: *Неопределенные выражения*.

Лит.: [87].

**РАСПАДАЮЩАЯСЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА** — квадратичная форма, представимая в виде произведения двух *линейных форм*. Квадратичная форма над полем комплексных чисел является Р. к. ф. тогда и только тогда, когда ее ранг меньше или равен 2.

Квадратичная форма над полем действительных чисел является распадающейся тогда и только тогда, когда ее ранг меньше или равен 1 или же когда ее ранг равен 2, а *сигнатура* равна нулю.

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** — одно из основных понятий теории вероятностей. Р. вероятностей случайной величины  $\xi$ , принимающей конечное число значений, задается указанием того, с какой вероятностью  $p$  величина  $\xi$  принимает каждое данное свое значение. Р. таких величин удобно задавать *таблицей*. Аналогично задается Р. величины  $\xi$ , принимающей счетное множество значений  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  (дискретное Р.). Рассматривают такие случайные величины, множества значений которых содержат отрезок числовой оси. Обычно в подобных случаях бесспорно говорить о вероятности того, что  $\xi$  принимает значение, равное данному (такая вероятность равна нулю). Вероятность  $P(x, \Delta x)$  неравенства  $x < \xi < x + \Delta x$  есть бесконечно малая величина в общем случае того же порядка, что  $\Delta x$ , т. е.  $P(x, \Delta x) = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$ .

Функция  $f(x)$  называется плотностью вероятности или дифференциальным законом распределения. Рассматривается также  $F(x)$  — вероятность неравенства  $\xi < x$ . Функция  $F$  называется интегральным законом распределения. Легко видеть, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Вероятность неравенства  $a < \xi < b$  в терминах  $F$  и  $f$  выражается так:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt \quad (\text{рис. 77}).$$

**Примером** дискретного Р. является Пуассона распределение. **Примером** непрерывных Р. является *нормальное* или *гауссово распределение*.

Важнейшими характеристиками Р. являются *математическое ожидание* и *дисперсия*. См. также: *Моменты*.

Лит.: [17, 26, 83].

**РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН** — см. *Дистрибутизность*.

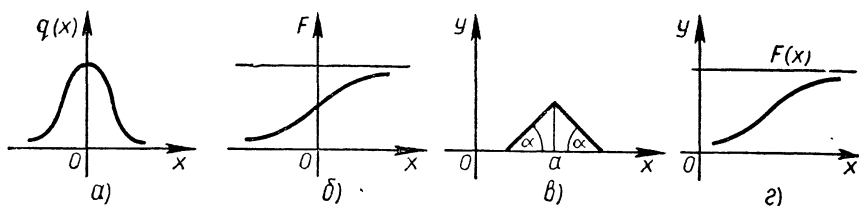


Рис. 77

**РАССТОЯНИЕ** — неотрицательное число  $\rho(M_1, M)$ , сопоставляемое всякой упорядоченной паре точек какого-либо пространства (в частности, паре точек прямой, плоскости, обычного трехмерного пространства). Это число называют также  $P$ . между точками  $M$  и  $M_1$ . Обычно требуют, чтобы  $P$ . удовлетворяло следующим аксиомам метрического пространства: 1) аксиома тождества:  $\rho(M_1, M) = 0$  в том и только в том случае, когда  $M$  совпадает с  $M_1$ , т. е.  $M \equiv M_1$ ; 2) аксиома симметрии:  $\rho(M_1, M) = \rho(M, M_1)$ ; 3) аксиома треугольника:  $\rho(M, M_1) + \rho(M_1, M_2) \geq \rho(M, M_2)$ .

Примеры. 1. См. в термине *Метрические пространства*.

2. За  $P$ . между точками на поверхности обычно принимается длина отрезка *геодезической линии*, соединяющей эти точки. В частности, на сфере расстояние между точками измеряется длиной дуги окружности большого круга, проходящего через эти точки (из двух дуг выбирается меньшая).

3. Для путешественника в гористой местности естественно считать  $P$ . между двумя пунктами наименьшее время, необходимое для перехода из первого пункта во второй. В этом примере  $P$ . не удовлетворяет аксиоме симметрии.

Лит.: [94].

**РАСХОДЯЩИЙСЯ ИНТЕГРАЛ** — интеграл вида  $\int_a^\infty f(x) dx$  такой, что  $\lim_{A \rightarrow \infty}$

$\int_a^A f(x) dx$  равен  $\pm \infty$  или же отсутствует вовсе, где  $f(x)$  определена в промежутке

$[a; \infty[$  и интегрируема в любой его части  $[a; A]$ . Например,  $\int_0^\infty \cos x dx$  и  $\int_0^\infty x^{-1} dx$  являются  $P$ . и., так как первый вообще не имеет значения при верхнем пределе ( $\sin x$  при  $x \rightarrow \infty$  не стремится ни к какому пределу), а второй равен бесконечности.

Если подынтегральная функция  $f(x)$  внутри промежутка интегрирования  $[a; b]$  обращается в бесконечность в точке  $c$ , то под интегралом  $\int_a^b f(x) dx$  понимают выражение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

Если этот предел конечен, то интеграл сходится, если бесконечен (т. е. равен  $\pm \infty$ ) или не существует вовсе, то интеграл называется  $P$ . и.

Существуют методы, позволяющие и Р. и. в некоторых случаях приписывать определенным образом «обобщенные» числовые значения. Если, например, функция  $f(x)$  определена для  $x \geq 0$  и интегрируема в обычном смысле в любом конечном промежутке  $[0; x]$ , но не интегрируема в промежутке  $[0; \infty[$  и если существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} [(1/x) \int_0^x F(u) du] = I$  (среднего значения  $(1/x) \int_0^x F(u) du$

функции  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ), то это число  $I$  и считают обобщенным значением интеграла, а  $f(x)$  — интегрируемой в обобщенном смысле. Например,  $\int_0^x \cos u du =$

$= +\sin x$  — его среднее значение  $(1/x) \int_0^x \sin u du$  имеет предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( (1/x) \int_0^x \sin u du \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 - \cos x)/x],$$

равный нулю; следовательно, Р. и. в обобщенном смысле равен нулю.

Если для  $f(x)$  интеграл  $\int_0^\infty f(x) dx$  не существует, но сходится интеграл

$\int_0^\infty f(x) e^{-kx} dx$  ( $k > 0$ ) и существует конечный предел  $I = \lim_{k \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-kx} f(x) dx$ , то

этот предел можно также рассматривать как обобщенное значение интеграла, расходящегося в обычном смысле, например:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-kx} \cos x dx = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{k^2 + 1} = 0.$$

Лит.: [87].

**РАСХОДЯЩИЙСЯ РЯД** — ряд  $\sum_{i=1}^\infty c_i$ , у которого предел частичных сумм

$S_n = \sum_{i=1}^n c_i$  при  $n \rightarrow \infty$  или бесконечен ( $\pm \infty$ ), или не существует вообще.

О двух Р. р.  $\sum_{i=1}^\infty c_i$  и  $\sum_{i=1}^\infty c'_i$  говорят, что второй из них расходится медленнее,

чем первый, если его частичная сумма  $S'_n = \sum_{i=1}^{i=n} c'_i$  является бесконечно большой

низшего порядка по сравнению с частичной суммой  $S_n$  первого:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S'_n / S_n) =$

$= 0$ . Для каждого Р. р.  $\sum_{i=1}^\infty c_i$ ,  $S_n \rightarrow \infty$  можно построить ряд, медленнее расхо-

дящийся. С этой целью можно, например, взять ряд:

$$\sum_{i=1}^\infty c'_i \equiv \sqrt{|S_1|} + \sum_{i=2}^\infty (\sqrt{|S_i|} - \sqrt{|S_{i-1}|}).$$



Равенство рангов матрицы системы и Р. м. с. у. является необходимым и достаточным условием для совместности системы линейных уравнений. Это утверждение является содержанием *Кронекера — Капелли теоремы*.

**РЕБРО ВОЗВРАТА** развертывающейся поверхности — линия, совокупность точек касательных к которой составляет эту поверхность. Доказывается, что у всякой *развертывающейся поверхности*, кроме конуса, цилиндра и плоскости, существует Р. в. Р. в. является кривой, состоящей из особых точек поверхности. Каждая плоская кривая, принадлежащая развертывающейся поверхности и пересекающая Р. в., имеет в пересечении точку возврата.

Другим определением Р. в. является следующее: если задана развертывающаяся поверхность как однопараметрическое семейство прямых  $l(t)$ , тогда предел основания общих перпендикуляров прямых  $l(t)$  и  $l(t + \Delta t)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  образуют Р. в.

Лит.: [61, 71].

**РЕГИОМОНТАНА ФОРМУЛА** — формула плоской тригонометрии, устанавливающая зависимость между длинами двух сторон треугольника и тангенсами полусуммы и полуразности величин противолежащих им углов. Р. ф. имеет вид:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} 0,5(\widehat{A}-\widehat{B})}{\operatorname{tg} 0,5(\widehat{A}+\widehat{B})},$$

где  $a, b$  — длины сторон треугольника,  $\widehat{A}, \widehat{B}$  — величины углов, соответственно противолежащих указанным сторонам.

Р. ф. иногда называют также формулой (теоремой) тангенсов. Р. ф. названа по имени немецкого астронома и математика Иоганна Мюллера (по-латински *Regiomontanus*), установившего эту формулу. И. Мюллера называли «Кенигсберг-жид», т. е. житель Кенигсберга: по-немецки *König* — король, царь, *Berg* — гора а по-латински «король» и «гора» в родительном падеже *regis* и *montis*. Отсюда «Регiomонтан» — латинизированное прозвище И. Мюллера.

См. также: *Теоремы сложения, Синусов теорема, Косинусов теорема*.

**РЕГУЛЯРНАЯ ТОЧКА:** 1°. Р. т. аналитической функции — такая точка, что в некоторой ее окрестности функция может быть разложена в *степенной ряд*.

2°. Р. т. дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x) \frac{dy}{dx} + p_2(x) y = 0$$

— точка, являющаяся полюсом функции  $p_k$  порядка не выше  $k$  ( $k = 1, 2$ ).

3°. Р. т. разрыва функции  $f(x)$  — точка  $x_0$  такая, что выполняется равенство

$$f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)).$$

4°. Р. т. системы линейных уравнений с переменными коэффициентами — значения параметров, при которых ранг матрицы системы не ниже, чем во всех точках достаточно малой окрестности Р. т.

Лит.: [56, 67].

**РЕЗОЛЬВЕНТА:** 1°. Р. линейного оператора.  $A$  — оператор  $\Gamma_\lambda$ , обратный оператору  $A - \lambda E$  и обозначаемый  $(A - \lambda E)^{-1}$ . Здесь  $\lambda$  — произвольное комплекс-

сное число,  $E$  — тождественный оператор.  $P$ . оператора  $A$ , определяемого равенством

$$Af(x) = \int_a^b k(x, t)f(t)dt,$$

где  $k(x, t)$  непрерывна, есть *мероморфная функция* по  $\lambda$ , полюсы которой совпадают с собственными значениями оператора  $A$ . Зная  $P$ . оператора  $A$ , можно сразу написать решение интегрального уравнения Фредгольма:

$$\int_a^b k(x, t)y(t)dt - \lambda y(x) = g(x),$$

именно:  $y = \Gamma_\lambda g(x)$ .

**2°.  $P$ . уравнения  $n$ -й степени:**

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

неприводимого над данным полем  $\omega$ , — уравнение  $g(x) = 0$  ( $g(x)$  — многочлен) такое, что присоединение одного из корней уравнения  $g(x) = 0$  к полю  $\omega$  дает поле, содержащее все корни уравнения  $f(x) = 0$ .

$P$ . уравнения четвертой степени является уравнением не выше третьей степени. Для уравнения степени  $n > 4$  степень  $P$ ., вообще говоря, больше  $n$ . Знание корней  $P$ . позволяет найти корни уравнения  $f(x) = 0$  при помощи решения более простых уравнений.

Понятие  $P$ . возникло в связи с задачей решения произвольного уравнения  $n$ -й степени.  $P$ . играет важную роль в классическом труде Э. Галуа. Важную проблему *Галуа теории* решил советский математик Н. Г. Чеботарев (1931).

См. также: *Поле, Неприводимый многочлен, Неприводимое уравнение.*

Лат. *resolvero* — решаю, развязываю.

**РЕЗУЛЬТАНТ** двух многочленов:

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  и  $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$  ( $a_0 \neq 0$ ,  $b_0 \neq 0$ ) есть определитель порядка  $m+n$ :

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \text{ раз} \\ \\ \\ \\ \\ \\ n \text{ раз} \end{array}$$

Если  $P$ . равен нулю, то многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют общий делитель степени больше нуля, и наоборот.  $P$ .  $f(x)$  и  $g(x)$  выражается через корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  многочлена  $f(x)$  и корни  $y_1, y_2, \dots, y_m$  многочлена  $g(x)$  по формуле

$$R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^m (x_i - y_k).$$

Лит.: [47].

**РЕКУРРЕНТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ** — последовательность, удовлетворяющая *рекуррентной формуле*. В частности, под Р. п. понимают последовательность  $u_n$  ( $n \in N$ ), удовлетворяющую равенству

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \quad (n \geq 1). \quad (*)$$

Такую Р. п. также называют *возвратной последовательностью*, а число  $k$  — ее порядком. Равенство (\*), называемое *возвратным уравнением* порядка  $k$ , является по существу уравнением в конечных разностях, а теория Р. п. является одним из разделов исчисления конечных разностей (см. *Конечных разностей исчисление*). Частными случаями Р. п. являются *арифметическая* ( $k = 2$ ) и *геометрическая* ( $k = 1$ ) *прогрессии*, а также последовательность  $n$ -х степеней натуральных чисел ( $k = n + 1$ ). Последовательность коэффициентов в выражении

$$D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \dots + D_n x^n + \dots,$$

полученном делением многочлена  $l$ -й степени на многочлен  $k$ -й степени, расположенный по возрастающим степеням:

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_k x^k \quad (B_0 \neq 0),$$

также является, начиная с некоторого номера, Р. п. порядка  $k$ , а именно:

$$D_{n+k} = -\frac{B_1}{B_0} D_{n+k-1} - \dots - \frac{B_k}{B_0} D_n \quad \text{при } n \geq l - n + 1.$$

Последний пример носит весьма общий характер: оказывается, что произвольная Р. п.  $u_n$  ( $n \in N$ ) порядка  $k$ , удовлетворяющая уравнению (\*), есть последовательность коэффициентов частного, полученного от деления некоторого многочлена на многочлен

$$1 - a_1 x - \dots - a_k x^k.$$

Теория Р. п. является аналогом теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Так, например, все Р. п., удовлетворяющие уравнению (\*), образуют *векторное пространство* размерности  $k$ . Если  $\lambda_0$  — корень характеристического уравнения  $\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \dots + a_k$ , то геометрическая прогрессия со знаменателем  $\lambda_0$  есть Р. п., удовлетворяющая уравнению (\*). Если все корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  этого характеристического уравнения различны, то геометрические прогрессии со знаменателями  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  образуют базис векторного пространства решений уравнения (\*).

Впервые Р. п. встречается в работах А. де Муавра и Я. Бернулли, однако стройную теорию Р. п. мы имеем благодаря работам Л. Эйлера.

Лит.: [22].

**РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА** — формула вида

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-p}), \quad n \geq p + 1,$$

выражающая каждый член последовательности  $a_n$  ( $n \in N$ ) через  $p$  предыдущих членов.

При помощи этой формулы, зная  $p$  первых членов последовательности, можно определить всю последовательность, т. е. вычислить любой наперед заданный член последовательности. Этот прием оказывается полезным при решении многих



задач. Примером Р. ф. является формула длины стороны при удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника ( $p = 1$ ):

$$a_n = \sqrt{2R^2 - 2R \sqrt{R^2 - \frac{a_{n-1}^2}{4}}}, \quad n \geq 2.$$

Здесь  $R$  — радиус описанной окружности.

Если сторона  $a_1$  исходного правильного вписанного многоугольника задана, то  $a_n$  есть сторона многоугольника, полученного из исходного  $(n - 1)$ -кратным удвоением числа сторон.

Р. ф. используется, например, при вычислении  $I_n = \int \sin^n x dx$ :

$$I_n = \frac{-\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Решение уравнения Бесселя  $y'' + (1/x)y' + (1 - v^2/x^2)y = 0$  может быть записано в виде ряда:  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+v}$ . Чтобы определить коэффициенты  $a_n$ , достаточно установить, что  $4n(n+v)a_n + a_{n-2} = 0$ ,  $n \geq 1$ . После чего сразу получается известный результат:

$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (1+v)(2+v) \dots (n+v)}.$$

Очень часто Р. ф. рассматривают в теории конечных разностей (см. *Конечных разностей исчисление*).

**РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ** — функции  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , значения и аргументы которых суть целые неотрицательные числа и для которых могут быть указаны определенные правила, позволяющие фактически вычислить  $y$  по заданному набору  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , входящему в область определения  $f$ . Может быть введено также понятие о частично-рекурсивных функциях, отождествляемых в настоящее время с функциями, вычисляемыми с помощью произвольного алгоритма. Теория Р. ф. используется в математической логике и основаниях математики, а также в теории современных быстродействующих электронных вычислительных машин.

Первые работы по рекурсивным функциям были опубликованы немецким математиком Г. Грассманом (XIX в.). Р. ф. интенсивно изучаются после работ немецкого математика Д. Гильберта (20-е годы XX в.). В 1931 г. австрийский математик К. Гёдель доказал с их помощью теорему о невозможности полной аксиоматизации арифметики. Окончательно теория Р. ф. становится особой отраслью математики в 40-х годах XX в.

Лат. recursio — возвращение.

Лит.: [59].

**РЕПЕР**  $n$ -мерного пространства — упорядоченная совокупность  $n$  линейно независимых векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ , исходящих из общего начала отсчета — начала системы координат. Так, двумерным Р. будет являться пара неколлинеарных векторов  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ , исходящих из общего начала отсчета (начала координат); трехмерным Р. (или Р. трехмерного пространства) является тройка неколла-

нарных векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , исходящих из общего начала отсчета. Если векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$   $P$ . направлены по осям координат  $n$ -мерного пространства, то векторы, определяющие  $P$ ., называют также координатными векторами.

Каждый вектор  $\vec{r}$   $n$ -мерного пространства можно разложить по векторам  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$   $P$ ., т. е. представить его как линейную комбинацию этих векторов:

$$\vec{r} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n,$$

где числа  $\alpha_i$  называются координатами вектора  $\vec{r}$ . Если на векторы трехмерного  $P$ . наложены определенные условия, то он часто носит особое название (например, *Триэдр*).

Франц. герёге — метка, ориентир.

Лит.: [72].

**РЕФЛЕКСИВНОСТЬ** — свойство бинарного отношения  $\rho$ , состоящее в том, что если  $\rho$  определено на множестве  $M$  (точнее, на  $M \times M$ ), то  $(m, m) \in \rho$  для всякого  $m \in M$ , т. е. всякий элемент  $m \in M$  находится в отношении  $\rho$  к самому себе. Например, отношение равенства чисел, отношение эквивалентности (равносильности) уравнений или их систем, отношение подобия треугольников удовлетворяют все  $P$ . Отношение строгого порядка  $<$  в множестве действительных чисел не удовлетворяет условию  $P$ .

**РИКАТТИ УРАВНЕНИЕ** — дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^\alpha,$$

где  $a, b, \alpha$  — постоянные. Как показал Я. Бернулли,  $P$ . у. интегрируется в элементарных функциях при  $\alpha = -2$  или  $\alpha = -4^k : (2k - 1)$  ( $k$  — целое).  $P$ . у. общего вида — дифференциальное уравнение:

$$\frac{du}{dx} = P(x)u^2 + Q(x)u + R(x), \quad P(x) \neq 0.$$

При  $R(x) = 0$  это  $P$ . у. называется уравнением Бернулли; последнее интегрируется в конечном виде.

**РИМАНА ГЕОМЕТРИЯ** (эллиптическая геометрия) — двумерная геометрия сферы в трехмерном евклидовом пространстве с отождествленными диаметрально противоположными точками (такая поверхность топологически эквивалентна проективной плоскости).  $n$ -мерная  $P$ . г. моделируется на сфере в  $(n + 1)$ -мерном евклидовом пространстве (диаметрально противоположные точки отождествляются). «Прямые»  $P$ . г. являются большие круги сфер (с указанным отождествлением). Метрика (измерение длин, углов и т. п.) индуцируется метрикой сферы. В  $P$ . г. существуют движения, сохраняющие метрику и переводящие любую точку пространства в любую другую (однородность  $P$ . г.). Пространство, в котором действует  $P$ . г. (эллиптическое пространство), имеет положительную постоянную риманову кривизну.

$P$ . г. может быть задана аксиоматически, подобно евклидовой геометрии. Однако система аксиом  $P$ . г. существенно отличается от системы аксиом Евклида. Например, любые две прямые в  $P$ . г. пересекаются, плоскость не разделяет

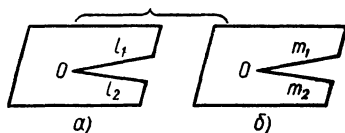


Рис. 78

пространства и т. п. Р. г. — одна из немногих неевклидовых геометрий, хорошо изученных к настоящему времени.

Лит.: [72].

**РИМАНА ИНТЕГРАЛ** — обычный определенный интеграл. Необходимые и достаточные условия его существования: 1) интервал интегрирования конечен; 2) интегрируемая функция ограничена; 3) *Лебега мера* множества точек разрыва функции на этом интервале равна нулю. Существуют обобщения Р. и. — *Лебега интеграл*, *Стилтьеса интеграл* и др. С их помощью можно интегрировать более широкий класс функций, нежели с помощью Р. и.

Лит.: [87].

**РИМАНА СФЕРА** — пополнение плоскости комплексного переменного одной бесконечно удаленной точкой (расширенная плоскость комплексного переменного). Расширенная плоскость взаимно однозначно отображается на обычную сферу трехмерного евклидова пространства при помощи стереографической проекции. Таким образом, каждую точку сферы можно считать комплексным числом (или  $\infty$ ). Р. с. используется в теории минимальных поверхностей и гармонических функций.

Лит.: [56].

**РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ** аналитической функции комплексного переменного  $f(z)$  — одно из основных понятий теории функций комплексного переменного. Аналитическая функция, рассматриваемая на своей Р. п., становится *однолистной* Р. п. Например, Р. п. функции  $y = z^2$  состоит из комплексных чисел  $\omega = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , причем два комплексных числа  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответствуют различным точкам Р. п., если аргумент первого отличается от аргумента второго менее чем на  $4\pi$ . Схематически Р. п. может быть представлена так: берутся две плоскости комплексного переменного, разрезаются по вещественной полуоси от 0 до  $\infty$ . Затем склеиваются  $l_1$  с  $m_2$ ,  $l_2$  с  $m_1$  (рис. 78). В настоящее время Р. п. рассматривается в контексте теории одномерных комплексных аналитических многообразий.

Лит.: [56].

**РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО** — гладкое *многообразие*, в каждой точке которого задан дважды ковариантный *тензор*  $g_{ij}$  ( $g_{ij}$  — непрерывно дифференцируемые функции точки) — невырожденный и симметричный. При помощи этого тензора определяется длина любой кривой Р. п.  $x^i = x^i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $n$  — размерность Р. п.), а также углы, площади и т. п. Именно эта длина равна

$$\int_0^l \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i(t) dx^j(t)}.$$

**Примеры.** 1) Поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, тензор  $g_{ij}$  — первая *квадратичная форма* поверхности; 2) поверхность  $k$  измерений в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\vec{M} = \vec{M}(u_1, u_2, \dots, u_k)$ ,

$$g_{ij}(u_1, u_2, \dots, u_k) = \left( \frac{d\vec{M}}{du^i}, \frac{d\vec{M}}{du^j} \right)$$

(скобки означают *скалярное произведение* векторов евклидова пространства). Если квадратичная форма  $g_{ij}$  положительно определена, то Р. п. называется *собственно римановым*. Абстрактное Р. п. определяется и весьма часто изучается вне той связи с объемлющим его евклидовым пространством, которая имеет место в примерах 1 и 2. См. *Римановы геометрии*. Лит.: [72].

**РИМАНОВЫ ГЕОМЕТРИИ** — геометрии римановых пространств — раздел дифференциальной геометрии, изучающей свойства *римановых пространств*, которые могут быть выражены в терминах метрического тензора  $g_{ij}$ . Геометрии римановых пространств в окрестности некоторой точки совпадают с геометрией Евклида до величин 1-го порядка малости включительно. Так, для измерений небольших участков на земной поверхности с большой точностью применяется евклидова геометрия. Риману же принадлежит идея вычисления длины кривой бесконечно малыми шагами. При каждом таком шаге длина кусочка кривой вычисляется в евклидовой метрике:

$$\sum_{i,j} g_{ij}(x_0) dx^i dx^j,$$

но коэффициенты этой метрики меняются от точки к точке (см. *Риманово пространство*). В Р. г. определяется некоторый аналог прямых линий евклидовой геометрии — *геодезические линии*. Эти линии реализуют минимум расстояния в достаточно малой области *риманова пространства*. Важнейшими понятиями Р. г. являются кривизна риманова пространства в двумерном направлении (см. *Кривизна*), аффинная связность, порожденная метрическим тензором  $g_{ij}$ , ковариантное дифференцирование в этой связности и тесно с ним связанный параллельный перенос.

Развитие Р. г. шло одновременно с развитием аппарата тензорного исчисления, созданного в основном математиками итальянской школы (Риччи, Леви-Чевита и др.), крупный вклад в теорию был сделан семинаром по Р. г. и тензорному анализу при Московском университете (семинар основан в 1928 г. В. Ф. Каганом). Много новых идей и методов было предложено французским математиком Э. Картаном.

Проблемами геометрии римановых пространств являются, в частности, вопросы погружения в целом риманова пространства в евклидово, изучение специальных видов римановых пространств, в частности однородных римановых пространств, и др.

Р. г. с момента своего возникновения имели большую область приложения к различным задачам физики. В трудах Римана, Герца теория Р. г. применялась к задаче распространения тепла в анизотропном теле, к механике и т. д. Очень важным приложением Р. г. является теория относительности Эйнштейна, который показал, что пространственно-временное многообразие можно рассматривать как псевдориманово пространство четырех измерений. В свою очередь развитие теории Р. г. во многом стимулировалось запросами теории относительности.

Лит.: [72].

**РИМСКИЕ ЦИФРЫ** — знаки, обозначающие числа:

М	D	C	L	X	V	I	
1000	500	100	50	10	5	1	(*)

С помощью Р. ц. можно записывать целые положительные числа. Если совокупность Р. ц., означающих некоторое натуральное число, записанное знаками, имеет порядок слева направо тот же, что и порядок знаков в (\*), тогда совокупность Р. ц. означает число, равное сумме значений, входящих в него Р. ц. Например, запись **MCXXVIII** означает число  $1000 + 100 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1 = 1128$ . Однако, если в записи числа Р. ц. имеется *инверсия* (нарушения порядка) (\*), тогда запись означает число, вычисленное по другому правилу: из двух рядом стоящих Р. ц., образующих инверсию, первое берется со знаком «минус». Например, **MCDLIX** означает число  $1000 - 100 + 500 + 50 - 1 + 10 = 1459$ . Р. ц. были введены в Древнем Риме.

См. также: *Нумерация, Система счисления, Позиционная система.*

**РИСУНОК** — одноцветное изображение предмета, выполненное от руки с учетом зрительного восприятия и глазомерной оценки выбранного масштаба.

В педагогическом процессе, в преподавании математики в школе учителю чаще всего приходится пользоваться Р., а не чертежом. См. также: *Проекция, Полное изображение фигуры, Аксонометрия, Начертательная геометрия.*

**РИТЦА МЕТОД** — широко применяемый прямой метод решения вариационных и краевых задач математического анализа (см. *Вариационное исчисление, Краевые задачи*). Функцию  $y(x)$ , доставляющую экстремум функционалу  $v[y(x)]$  и удовлетворяющую условиям:  $y(x_0) = \alpha$ ,  $y(x_1) = \beta$ , ищут не среди всех, вообще говоря, возможных функций, а лишь среди функций, представляющих собой линейные комбинации вида

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$$

с постоянными коэффициентами  $a_i$ , составленные из  $n$  первых функций некоторой выбранной системы  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , ...,  $\varphi_n(x)$ , ... и удовлетворяющие условию:  $y_n(x_0) = \alpha$ ,  $y_n(x_1) = \beta$ . При таком подходе к вариационным задачам функционал  $v[y(x)]$  превращается в функцию  $\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n)$  от коэффициентов  $a_i$ , и задача сводится к отысканию экстремума  $\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Значения  $a_i = a_i^0$  доставляющие экстремум  $\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , а следовательно, и  $y_n$ , доставляющие экстремум функционалу  $v[y(x)]$ , определяются из соотношения  $\partial\Phi/\partial a_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Найденное таким способом приближенное решение задачи  $y_n$  стремится

при некоторых условиях, касающихся полноты системы  $\varphi_i$ , к точному решению  $y(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Лит.: [8].

**РОД ПОВЕРХНОСТИ** — целое неотрицательное число, характеризующее связность поверхности. Каждую замкнутую ориентируемую по-

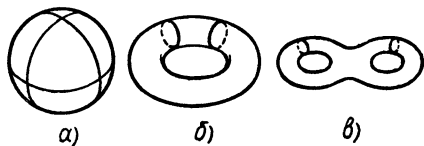


Рис. 79

верхность можно топологически (непрерывной деформацией без разрывов и склеивания) отобразить на сферу с  $p$  ручками. Число  $p$  называется *родом* этой поверхности. Так, сфера (рис. 79) — поверхность рода 0, тор — рода 1, крендель — рода 2 и т. д.; грубо говоря, Р. п. равен числу дыр в ней. Р. п. можно определить как наибольшее число взаимно непересекающихся простых замкнутых кривых, которые можно провести на поверхности, не разбивая ее на части.

Если поверхность представляет собой многогранник, то его род связан с числом вершин ( $B$ ), граней ( $\Gamma$ ) и ребер ( $P$ ) формулой  $B + \Gamma - P = 2(1 - p)$ , где  $p$  — род многогранника. Для простого многогранника ( $p = 0$ ) получается известная формула Декарта — Эйлера:

$$B + \Gamma - P = 2$$

(см. *Эйлерова характеристика поверхности*). Неориентируемая замкнутая поверхность может быть представлена как сфера с  $h$  круговыми отверстиями, каждое из которых заклеено листом Мёбиуса (граница отверстия склеена с границей листа (ленты) Мёбиуса). Число  $h$  называется родом этой поверхности.

Р. п. является топологическим инвариантом. Если две поверхности имеют один и тот же Р. п., то их можно топологически преобразовать друг в друга. Например, крендель, изображенный на рисунке, и сфера с двумя ручками имеют род 2, поэтому каждую из них можно деформировать в другую (см. рис. 79).

Лит.: [6].

**РОДРИГА ФОРМУЛЫ:** 1°. Р. ф. в дифференциальной геометрии выражают пропорциональность производных единичного вектора нормали к поверхности и радиус-вектора к поверхности, взятых в одном из главных направлений поверхности (см. *Главное направление*). Если  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — символы дифференцирования в главных направлениях,  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали,  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны, то

$$\delta_1 \vec{n} = -\frac{1}{R_1} \delta_1 \vec{r}, \quad \delta_2 \vec{n} = -\frac{1}{R_2} \delta_2 \vec{r},$$

где  $\vec{r}$  — текущий радиус-вектор поверхности.

2°. Р. ф. в теории специальных функций иногда называют выражения многочленов Лежандра (см. *Лежандра многочлены*) в виде:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Лит.: [62, 71].

**РОЗЫ** — семейство плоских кривых, полярное уравнение которых имеет вид:  $\rho = a \sin k\varphi$  или  $\rho = a \cos k\varphi$ , где  $a$  и  $k$  — постоянные числа. Если  $k$  — рациональное число, то Р. — алгебраические кривые четного порядка. Если  $k$  — иррациональное число, то Р. состоит из бесчисленного множества лепестков, пересекающихся друг с другом.

Число различных Р. одного и того же порядка  $n$  при  $n$ , кратном 4, равно значению функции

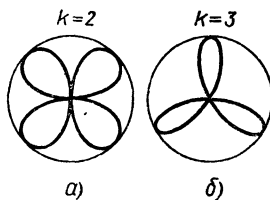


Рис. 80

$\pi(n)$  (т. е. числу простых чисел, меньших  $n$ ). Если  $n$  не кратно 4, то число  $P$  одного и того же порядка равно  $\pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right)$ .

При  $k = 2$   $P$  называются четырехлепестковыми, при  $k = 3$  — трехлепестковыми (рис. 80). Полярные уравнения их соответственно будут иметь вид:  $\rho = a \sin 2\varphi$  и  $\rho = a \sin 3\varphi$ . В прямоугольной декартовой системе координат четырехлепестковая  $P$  имеет уравнение  $(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$ , а трехлепестковая — уравнение  $(x^2 + y^2)^2 - a(3x^2y - y^3) = 0$ .  $P$  иначе называются кривыми Гвидо Гранди, по имени итальянского геометра, впервые изучавшего их (1728).

Лит.: [74].

**РОЛЛЯ ТЕОРЕМА** — одна из основных теорем дифференциального исчисления.  $P$  т. утверждает, что если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , дифференцируема в промежутке  $]a; b[$  и  $f(a) = f(b)$ , то существует точка  $c \in ]a; b[$  такая, что  $f'(c) = 0$ .

$P$  т. названа именем английского математика Ролля. Лит.: [87].

**РОМБ** — параллелограмм, все стороны которого конгруэнтны (равны по длине). Приведенное определение  $P$  является избыточным: достаточно было указать, что  $P$  — параллелограмм, у которого две смежные стороны равны (отсюда будет следовать, что у  $P$  все стороны равны).

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам. Во всякий  $P$  можно вписать окружность. Прямые, содержащие диагонали  $P$ , являются его осями симметрии. Высоты  $P$  равны между собой. Площадь  $P$  равна половине произведения его диагоналей или, как и для всякого параллелограмма, равна произведению его основания на высоту. См. также: *Ромбоид*.

**РОМБОИД** — синоним термина *Дельтоид*.

**РОМБОЭДР** — параллелепипед, все грани которого — конгруэнтные ромбы. Форму  $P$  имеют некоторые кристаллы, например кристаллы исландского шпата. См. также: *Многогранник*, *Правильный многогранник*.

**РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ**  $\vec{a} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$  — оператор, который дифференцируемому векторному полю ставит в соответствие некоторое другое векторное поле (обозначение  $P$  в. п.:  $\vec{\text{rot}} \vec{a}$ ):

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \vec{k}.$$

Часто  $P$  в. п.  $\vec{a}$ , т. е. вектор  $\vec{\text{rot}} \vec{a}$ , записывают в виде векторного произведения оператора Гамильтона  $\vec{\nabla}$  (*Набла-оператор*) и вектора  $\vec{a}$ :

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

или в виде другого представления:

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S (\vec{n} \times \vec{a}) dS}{V},$$

где  $V$  — бесконечно малый объем, стягивающийся в точку,  $S$  — ограничивающая этот объем поверхность,  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к этой поверхности.

**Линия в пространстве**, в каждой точке которой  $P$ . в. п. лежит на касательной, называется **вихревой линией**.

$P$ . в. п.  $\vec{a}$  также называют **вихрем** векторного поля или ротацией. Иногда  $P$ . в. п.  $\vec{a}$  обозначают через  $\text{curl } \vec{a}$ .

Англ. *rotor* — вращатель; *curl* — локон, завиток.

См. также: **Дивергенция** (расходимость) **векторного поля**, **Градиент функции**, **Лапласа оператор** (лапласиан  $\Delta$ ).

Лит.: [34, 82].

**РУЛЕТТЫ** — траектории точек, жестко связанных с кривой, которая катится без скольжения по другой неподвижной кривой (базисной), при этом обе кривые и фиксированная точка лежат в одной плоскости.

Франц. *roulette* от *rouler* — катать.

Лит.: [74].

**РУНГЕ МЕТОД** приближенного интегрирования дифференциальных уравнений относится к числу методов приближенного интегрирования, в котором решение дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  с начальным условием  $y_0 = y(x_0)$  строят, находя по заданным  $x_0, y_0$  число  $\Delta y_0$ , т. е. приращение  $y$  при некотором приращении  $x$ , равном  $h$ , и определяя затем  $y_1 = y_0 + \Delta y_0$ , соответствующее значению  $x = x_1 = x_0 + h$ . После этого находят по  $x_1$  и  $y_1$  число  $\Delta y_1$  и определяют  $y_2 = y_1 + \Delta y_1$ , соответствующее  $x_2 = x_1 + h$ , и т. д.

Метод Рунге основан на применении для  $\Delta y_n$  формулы

$$\Delta y_n = \frac{1}{6} (k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)}),$$

$$h = x_j - x_{j-1} = \text{const},$$

где

$$k_1^{(n)} = hf(x_n, y_n), \quad k_2^{(n)} = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1^{(n)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(n)} = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2^{(n)}}{2}\right), \quad k_4^{(n)} = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{k_3^{(n)}}{2}\right).$$

Полагая  $n = 0$ , получаем  $\Delta y_0$  и находим  $y_1$  и т. д.

См. также: **Численное интегрирование**.

Лит.: [8].

**РУФФИНИ—АБЕЛЯ ТЕОРЕМА** — теорема о неразрешимости в радикалах общего алгебраического уравнения пятой и более высокой степени. Первым доказательство (с пробелами) дал итальянский математик Руффини. Вполне строгое доказательство было дано норвежским математиком Абелем (1824).

См. также: **Уравнение**.

**РЯД** — последовательность символов, соединенных знаком «+»:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (*)$$

Символы последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , называемые членами  $P$ ., могут обозначать числа, функции, векторы, матрицы и т. п. Соответственно этому различают  $P$ . **числовые**, **функциональные**, **векторов**, **матриц**. Вместо развернутой записи  $P$ . (\*) очень часто употребляют сокращенное обозначение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (\text{или реже})$$





**САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯ ТОЧКА** — особая точка кривой, в которой кривая пересекает себя. Например, для лемнискаты

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

точка  $(0, 0)$  является точкой самопересечения. С. т. называется также узловой или кратной (рис. 81).

**САМОПРИКОСНОВЕНИЯ ТОЧКА** — особая точка кривой, в которой кривая касается самой себя. Например, для кривой  $y^2 - x^4 + x^6 = 0$  точка  $(0, 0)$  является С. т. (рис. 82).

**САРРЮСА ПРАВИЛО** вычисления определителя 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Закон составления выражения для определителя 3-го порядка весьма прост. Из членов, входящих со знаком «+», один будет произведением элементов главной диагонали, каждый из двух других — произведением элементов, лежащих на параллели к этой диагонали, с добавлением третьего множителя из противоположного угла матрицы (рис. 83, а). Члены, входящие со знаком «-», строятся таким же образом относительно другой диагонали (рис. 83, б). С. п. называют также правилом Саррюса или правилом диагоналей и треугольников.

Другой вариант «графического» пояснения С. п. состоит в том, что если к определителю приписать снизу еще раз первую и вторую строки, то со знаком «плюс» (точнее, со своим знаком) следует взять произведения элементов диагоналей, параллельных главной, а со знаком «минус» (точнее, с противоположным знаком) — произведения элементов диагоналей другого направления.

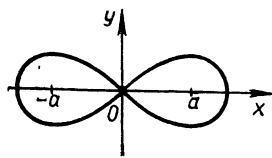


Рис. 81

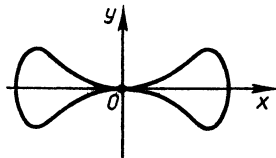


Рис. 82

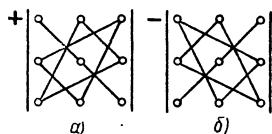


Рис. 83

**СВЕРТЫВАНИЕ ТЕНЗОРА** — операция тензорной алгебры, ставящая в соответствие смешанному тензору  $Z$  тензор  $V$  меньшей валентности по правилу:

$$V_{i_1 i_2 \dots i_l}^{i_1 i_2 \dots i_k} = \sum_{p=1}^n Z_{i_1 i_2 \dots i_l}^{i_1 i_2 \dots i_k p}.$$

Операция С. т. линейна; С. т. перестановочна с операциями тензорного анализа, абсолютным дифференцированием и т. п.

Рассматривается также свертывание тензоров, определенное формулой

$$V_{i_1 i_2 \dots i_l}^{i_1 i_2 \dots i_k r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_{p=1}^n Z_{i_1 i_2 \dots i_l}^{i_1 i_2 \dots i_k p} U_{s_1 s_2 \dots s_t}^{r_1 r_2 \dots r_m p}.$$

(см. *Тензорное исчисление*).

Лит.: [65].

**СВОБОДНЫЙ ВЕКТОР** — вектор, начало которого может быть совмещено с любой точкой пространства, в котором рассматривается данный вектор. С. в. можно переносить параллельно самому себе в любую точку пространства. Таким образом, С. в. задается своей длиной и направлением. Примерами С. в. могут служить скорость и ускорение твердого тела, движущегося поступательно.

С. в. часто называют в математике просто *вектором*. См. также: *Связанный вектор*, *Скользкий вектор*.

**СВЯЗАННЫЙ ЧЛЕН** — член уравнения, приведенного к каноническому стандартному виду  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , где  $f$  — многочлен, не содержащий неизвестных (переменных). Например, С. ч. уравнения  $x^2 - 2x + 6 = 0$  есть число 6; С. ч. уравнения  $x^2 - y^2 = 0$  равен нулю. С. ч. уравнения можно определить как член уравнения, содержащий неизвестные (переменные) в нулевой степени, т. е. С. ч. уравнения  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  — это член нулевого измерения.

**СВЯЗАННЫЙ ВЕКТОР** — вектор, начало которого совпадает с определенной (фиксированной) точкой пространства. Так, сила, приложенная к некоторой точке частицы жидкости, является примером С. в. Понятие С. в. часто используется в физике.

См. также: *Вектор*, *Свободный вектор*, *Скользкий вектор*.

**СВЯЗКА** — семейство линий на плоскости или поверхностях в пространстве, линейно зависящее от двух параметров. Семейство линий на плоскости, определяемое уравнением

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0, \quad (*)$$

где одновременно  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  не равны нулю, а  $F_1, F_2, F_3$  — функции двух переменных, есть С. Уравнение (\*) фактически зависит от двух параметров (отношения  $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ ). Три линии  $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$  определяют всю С., поэтому их можно назвать образующими. Аналогично определяется уравнение С. поверхностей в пространстве.

В геометрии рассматривают также С. прямых в пространстве, где образующими С. являются не поверхности, а линии. В проективной геометрии рассматривается одновременно С. прямых и плоскостей в пространстве — множество прямых и плоскостей, проходящих через фиксированную точку (конечную или бесконечно удаленную).

Обычно под образующими (элементами) С. понимают геометрические объекты: прямые, окружности, плоскости, сферы.

См. также: *Связка окружностей, Связка плоскостей, Связка прямых, Пучок*. Лит.: [3].

**СВЯЗКА ОКРУЖНОСТЕЙ** — семейство окружностей, линейно зависящее от двух параметров. Для каждой С. о. существует точка, имеющая одну и ту же степень относительно всех окружностей связки; эта точка называется центром С. о. С. о. называется эллиптической, гиперболической или параболической в зависимости от того, лежит ли центр С. о. внутри, вне или на окружностях связки. Уравнение С. о. имеет вид:

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  одновременно не равны нулю, а  $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$  — уравнения окружностей, образующих С. о. Совокупность общих элементов (окружностей) двух различных С. о. образуют *пучок окружностей*.

См. также: *Связка*.

**СВЯЗКА ПЛОСКОСТЕЙ** — семейство плоскостей, линейно зависящее от двух параметров. С. п. представляет собой множество плоскостей, проходящих через одну и ту же фиксированную точку трехмерного пространства. Фиксированная точка называется *центром* С. п.

См. также: *Пучок плоскостей, Связка прямых, Связка окружностей*.

**СВЯЗКА ПРЯМЫХ:** 1°. С. п. — множество прямых пространства, проходящих через одну и ту же фиксированную точку; фиксированная точка называется при этом центром С. п.

2°. С. параллельных прямых — множество прямых пространства, параллельных одной и той же прямой.

Иногда рассматривают С. прямых и С. плоскостей с общим центром и объединение С. прямых и С. плоскостей с общим центром называют связкой прямых и плоскостей.

**СВЯЗКА СФЕР** — семейство сфер, линейно зависящее от двух параметров. Множество точек пространства, имеющих одну и ту же степень относительно каждой сферы из С. с., представляет собой прямую — ось С. с.

В зависимости от того, пересекает ли ось С. с. каждую из сфер в двух действительных, в двух комплексно-сопряженных точках (иначе: не пересекает сфер) или двух слившихся точках, С. с. соответственно называется эллиптической, гиперболической или параболической.

С. с. есть пространственный аналог *пучка окружностей* на плоскости. Сечение С. с. любой плоскостью, проходящей через ось С. с., есть пучок окружностей.

**СВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ** — открытое множество евклидова пространства, которое не может быть разбито на два непересекающихся непустых открытых множества. Другое определение С. о. — область, любые две точки которой могут быть соединены непрерывной кривой (линейно-связная область). Например, множество комплексных чисел  $w$  таких, что  $a < |w| < b$ , есть С. о.

**СВЯЗНОЕ МНОЖЕСТВО** топологического пространства — множество, которое нельзя покрыть двумя непересекающимися непустыми открытыми в пространстве множествами (см. *Топологическое пространство, Открытое множество*), или, иначе, множество, которое связно как подпространство топологического пространства относительно индуцированной топологии. Лит.: [4].

**СВЯЗНОСТЬ АФФИННАЯ** в дифференциальной геометрии — способ перенесения вектора касательного пространства одной точки поверхности (вообще не-



происходит название этого типа особых точек дифференциального уравнения.

См. также: *Особые точки дифференциального уравнения.*

Пусть в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  функция  $f(x, y)$ , не ограничена и не имеет единственного предела. Простейшим примером является  $f(x, y) = \frac{ax + by}{cx + dy}$ , для которой точка  $(0, 0)$  является изолированной особой точкой. В уравнении

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy} \quad (*)$$

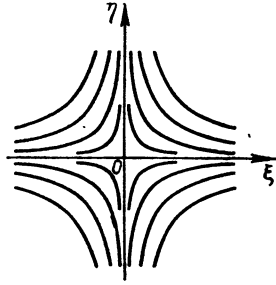


Рис. 86

сделаем замену переменных:  $\xi = \alpha x + \beta y$ ,  $\eta = \gamma x + \delta y$  — однородное аффинное преобразование, подбирая  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  так, чтобы уравнение  $(*)$  имело вид:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda\eta}{\mu\xi}, \quad (**)$$

при этом  $\lambda$  и  $\mu$  будут корнями уравнения

$$x^2 - (b + c)x + bc - ad = 0. \quad (***)$$

Решение уравнения  $(**)$  имеет вид:  $\eta = C |\xi|^{\lambda/\mu}$ . Если корни уравнения  $(***)$  действительные и разных знаков, то  $\lambda : \mu = -k < 0$  и уравнения интегральных кривых имеют вид:  $\eta = C |\xi|^{-k}$ . Два решения  $\xi = 0$  и  $\eta = 0$  проходят через особую точку  $(0, 0)$ , а все другие нет. Особая точка такого типа называется С. Например, при  $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\eta}{\xi}$  общий интеграл имеет вид:  $\xi\eta = C$ , т. е. имеем семейство гипербол, отнесенных к осям, и две асимптоты — они-то и проходят через особую точку (рис. 86).

Лит.: [67].

**СЕКАНС** — одна из тригонометрических функций — обозначается  $\sec$  (иногда  $\sec x$ , где  $x$  — аргумент), значения которой определяются формулой  $\sec x = 1 : \cos x$ , где  $\cos x$  — косинус того же аргумента (величины угла в градусной или радианной мере).

Областью определения С. является вся числовая ось, за исключением точек, абсциссы которых  $x = \frac{\pi}{2} (2n + 1)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . С. является функцией неограниченной ( $1 \leq |\sec x| \leq \infty$ ), четной (рис. 87), периодической с периодом  $2\pi$ .

Если рассмотреть произвольный радиус-вектор (переменный вектор с закрепленным началом  $O$ :  $\vec{OM} = \vec{r}$ ), начало которого совпадает с началом координат (рис. 88), то отношение  $|\vec{r}| : x_M = \sec \alpha$ , где  $\alpha$  — величина угла  $\widehat{AOM} = \alpha$ , заключенного между радиус-вектором точки  $M$  и положительным направлением оси  $Ox$  (с неподвижной стороной  $OA$  угла  $AOM$ ), а число  $x_M$  — абсцисса точки  $M$  — конца подвижного радиус-вектора. Знак С. совпадает со знаком косинуса ( $\cos \alpha$ ) того же аргумента  $\alpha$ . Если ограничиться рассмотрением только острого угла  $\alpha$ , то С. можно определить, исходя из рассмотрения прямоугольного треугольника

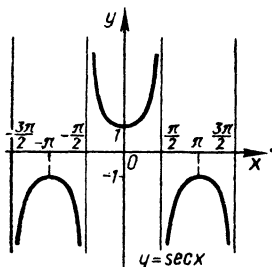


Рис. 87

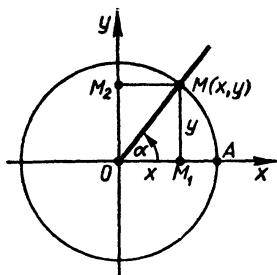


Рис. 88

$OMM_1$ , как отношение длины гипотенузы  $OM$  к длине катета  $OM_1$ , прилежащего к углу  $\alpha$ .

График  $C$ . в прямоугольной декартовой системе координат называется *секансоидой*.

Производная  $C$ . вычисляется по формуле

$$(\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \cdot \sec x.$$

Интеграл  $C$ . вычисляется по формуле

$$\int \sec x \, dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

Имеет место разложение  $C$ . в ряд:

$$\sec x = \frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} - \frac{3\pi}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{5\pi}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - x^2} - \dots,$$

где  $x$  — любое допустимое значение аргумента.

Функция, обратная  $C$ . на множестве, являющемся объединением промежутков  $[0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}; \pi]$ , называется *арксекансом*.

См. также: *Тригонометрические функции, Обратные тригонометрические функции*.

Лат. secans — секущая, от seco — режу, рассекаю.

**СЕКАНСОИДА** — график функции секанса  $y = \sec x$  в прямоугольной системе координат.

См. также: *Косекансоида, Синусоида, Косинусоида, Тангенсоида, Котангенсоида, График функции*.

**СЕКСТИЛЛИОН** — число  $10^{21}$ ; в Англии — число  $10^{36}$ . Единого названия больших чисел не существует. Термин  $C$ . малоупотребителен и имеет лишь историческое значение.

Лит.: [31, 95].

**СЕКТОР: 1º. С. круговой** — часть круга, ограниченная двумя его радиусами и дугой окружности круга.

**2<sup>о</sup>. С. эллиптический** — фигура, ограниченная двумя фокальными радиусами эллипса, имеющими общий фокус, и дугой эллипса. Так, рассматривают площадь С., описываемого фокальным радиус-вектором эллипса при изучении законов Кеплера. Аналогично определяется площадь параболического сектора и т. д.

**3<sup>о</sup>. С. шаровой** — часть шара, ограниченная круговой конической поверхностью с вершиной в центре шара и шаровой (сферической) поверхностью, вырезанной этой конической поверхностью.

См. также: *Шаровой сектор*.

**СЕКУНДА:** **1<sup>о</sup>. С. величины угла** — единица измерения величины угла, равная  $60^{-2}$  градусам, или  $60^{-1}$  минутам. Одна С. обозначается 1" (единица с двумя косыми штрихами вверх).

**2<sup>о</sup>. С. величины времени** — единица измерения величины времени, равная  $60^{-2}$  часам.

Лат. *secunda divisio* — второе деление части градуса или часа.

**СЕКУЩАЯ:** **1<sup>о</sup>. С. к кривой** — всякая прямая, имеющая с кривой по меньшей мере две общие точки.

**2<sup>о</sup>. С. плоскость многогранника** — плоскость, имеющая по крайней мере две точки, принадлежащие ребрам различных граней многогранника. С. плоскость пересекает многогранник по некоторому многоугольнику, число сторон которого не может быть больше числа граней многогранника.

**3<sup>о</sup>. С. равного наклона в геометрии Лобачевского** — прямая  $AB$ , пересекающая параллельные прямые  $a$  и  $b$  под равными по величине внутренними односторонними углами ( $A \in a, B \in b$ ).

См. также: *Орицикл, Касательная*.

**СЕМЕЙСТВО ЛИНИЙ** — множество линий, непрерывно зависящих от одного или нескольких параметров. С. л. на плоскости задается обычно уравнением вида  $F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ , (\*) где  $x, y$  — координаты точек на плоскости, а  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — параметры. При конкретных значениях параметров уравнение определяет одну линию. С. л. может быть определено и на поверхности; в этом случае вместо  $x$  и  $y$  следует рассматривать внутренние координаты  $u$  и  $v$  на поверхности. С. л. в пространстве задается в виде уравнений:

$$x = \varphi(t, c_1, c_2, \dots, c_n), y = \psi(t, c_1, c_2, \dots, c_n), z = \chi(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

(в параметрическом виде).

Зафиксировав значения параметров  $c_1, c_2, \dots, c_n$  и меняя  $t$ , получаем одну из линий семейства, которую можно рассматривать как траекторию точки  $(x, y, z)$ . По числу параметров различают С. л. однопараметрические, двухпараметрические и т. д. В исследовании свойств однопараметрических С. л. на плоскости или произвольной поверхности (удовлетворяющей лишь условию гладкости) важную роль играет понятие огибающей С. л. (см. также *Дифференциальная геометрия*). Обычно предполагается, что функции  $F, \varphi, \psi, \chi$  непрерывны и непрерывно дифференцируемы по своим аргументам. Если продифференцировать уравнение (\*) при  $n = 1$  (считая  $y = y(x)$ ) и из полученных таким путем уравнений исключить параметр  $c$ , то получится дифференциальное уравнение огибающей. Как видим, примером С. л. может служить семейство интегральных кривых некоторого дифференциального уравнения (см. *Общее решение*). Примерами С. л. являются: 1) однопараметрическое семейство концентрических



окружностей  $x^2 + y^2 = c$ ; 2) четырехпараметрическое семейство эллипсов и гипербол:

$$c_1 (x - c_2) + c_3 (y - c_4)^2 = 1;$$

3) дупараметрическое семейство винтовых линий:

$$x = c_1 \cos t, \quad y = c_1 \sin t, \quad z = c_2 t.$$

Лит.: [71].

**СЕРРЕ—ФРЕНЕ ФОРМУЛЫ** — формулы, выражающие разложение производных по длине дуги от единичных векторов касательной, нормали и бинормали кривой по самим этим векторам. Если  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  — единичные векторы соответственно касательной, нормали и бинормали, то имеют место:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k(s) \vec{n}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -k(s) \vec{t} + \kappa(s) \vec{b}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\kappa(s) \vec{n}, \quad (*)$$

называемые С. — Ф. ф., где  $k(s)$  и  $\kappa(s)$  являются соответственно кривизной и кручением кривой. По С. — Ф. ф., зная  $k(s)$  и  $\kappa(s)$ , отыскание конечных уравнений кривой сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (\*) и уравнения

$$\frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{t},$$

где  $\vec{M}(s)$  — текущий радиус-вектор кривой.

Справедлива теорема, что указанная система имеет единственное (с точностью до положения в пространстве) решение при любых непрерывных  $k(s)$  ( $k \geq 0$ ) и  $\kappa(s)$ . Иногда С. — Ф. ф. называют формулами Френе.

Лит.: [61, 71].

**СЕТЬ ЛИНИЙ** на поверхности — любая пара однопараметрических семейств линий на поверхности, гладко-зависящая от параметра. В дифференциальной геометрии С. л. изучается в малом, т. е. в некоторой окрестности точки такой, чтобы линии каждого из семейств не пересекались между собой, а пары линий, принадлежащих различным семействам, пересекались в единственной точке.

Теория сетей является важной главой дифференциальной геометрии.

**Примеры:** С. л. кривизны, сеть асимптотических линий и др.

**СЕЧЕНИЕ** в области рациональных чисел — разбиение множества рациональных чисел на два класса  $A$  и  $B$ , удовлетворяющие следующим условиям: 1) в каждом классе есть хотя бы одно число (каждый класс не пуст); 2) каждое рациональное число отнесено в один и только один из классов; 3) любое число из класса  $A$  (нижний или левый класс) меньше любого числа из класса  $B$  (верхний или правый класс). С. могут быть трех видов: 1) в первом классе  $A$  есть наибольшее число  $r$ ; 2) во втором классе  $B$  есть наименьшее число  $r$ ; 3) в первом классе  $A$  нет наибольшего, а во втором классе  $B$  нет наименьшего числа. В случаях 1 и 2 С. определяет рациональное число  $r$ . В случае 3 С. определяет иррациональное число; этот способ построения всех действительных чисел был предложен Дедекиндом (1831—1916). Если аналогично определить С. в области действительных чисел, то по теореме Дедекинда, выражающей свойство непрерывности множества действительных чисел, случай 3 невозможен и С. могут быть только 1-го и 2-го вида.

См. также: *Пеано аксиомы, Дедекиндово сечение, Комплексные числа.*

**СЕЧЕНИЕ ДЕДЕКИНДА** — то же самое, что и *Дедекиндово сечение.*

**СЕЧЕНИЕ ЗОЛОТОЕ** — см. *Золотое деление, Золотое сечение.*

**СЖАТЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ** — отображения подмножества метрического пространства самого в себя, при которых расстояния между точками уменьшаются (сжимаются). Точнее: отображение  $A$  называется С. о., если существует число  $0 \leq \Theta < 1$  такое, что  $\rho(Ax, Ay) : \rho(x, y) < \Theta$ , где  $x, y$  — произвольные точки подмножества,  $\rho(x, y)$  — расстояние между  $x$  и  $y$ .

Имеет место теорема, устанавливающая существование и единственность неподвижной точки множества при С. о. для ограниченных и полных метрических пространств (принцип С. о.).

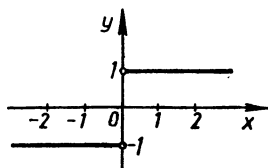


Рис. 89

**СИГНАТУРА** квадратичной формы  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$  — разность между числом положительных квадратов и отрицательных квадратов в нормальном виде квадратичной формы с действительными коэффициентами. См. *Инерции закон*. Следуя Бурбаки, под сигнатурой понимают пару вышеуказанных чисел, а не их разность.

**СИГНУМ** от  $x$  — функция от действительного числа  $x$ , равная 1 для положительных  $x$ , равная нулю при  $x = 0$  и равная  $-1$  для отрицательных  $x$ . Обозначается эта функция символом  $\text{sign } x$  или  $\text{sgn } x$ . Таким образом,

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Функция  $y = \text{sgn } x$  используется в различных разделах математики и программирования. График функции С. от  $x$  изображен на рисунке 89. В качестве примера употребления функции С. заметим, что формула для извлечения корня из комплексного числа при показателе корня 2 может быть записана так:

$$\sqrt{a+bi} = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i (\text{sgn} b) \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Лат. *signum* — знак.

**СИЛЬВЕСТРА КРИТЕРИЙ** положительной определенности *квадратичной формы*: квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все главные *миноры* матрицы квадратичной формы положительны. Главный минор матрицы — минор, образованный первыми  $k$  строками и столбцами матрицы.

**СИМЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА** — прямая, проходящая через вершину треугольника и делящая противоположную сторону (внутренним образом) на части, пропорциональные квадратам длин прилежащих сторон.

См. также: *Лемуана точка, Медиана, Биссектриса треугольника, Высота, Трисектриса угла, Торричелли точка.*

**СИММЕТРАЛЬ** отрезка  $AB$  — серединный перпендикуляр этого отрезка. С. отрезка называется также *медиатрисой* его; С. отрезка  $AB$  называется также

С. точек  $A$  и  $B$  — концов отрезка. С. отрезка  $AB$  является одной из двух осей симметрии отрезка, лежащих в плоскости отрезка.

**СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА** — группа подстановок из  $n$  элементов относительно операции *умножения подстановок*. С. г. содержит  $n!$  элементов.

**СИММЕТРИЧЕСКАЯ МАТРИЦА** — *квадратная матрица*, в которой элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны, т. е. в которой  $a_{ij} = a_{ji}$ .

**СИММЕТРИЧЕСКАЯ РАЗНОСТЬ МНОЖЕСТВ**  $A$  и  $B$  — множество, получающееся из множеств  $A$  и  $B$  с помощью операций вычитания множеств (см. *Разность множеств*) и объединения множеств. Если С. р. м.  $A$  и  $B$  обозначить символом  $A \oplus B$ , то по определению  $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Для С. р. м. справедливы законы:

$$A \oplus B = B \oplus A, (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C), A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C).$$

Таким образом, С. р. м.  $A$  и  $B$  — это множество тех элементов, которые входят хотя бы в одно из множеств  $A$  и  $B$ , но не входят в их *пересечение*, т. е. входят в одно и только одно из множеств  $A$  и  $B$ . Для сравнения С. р. м. с другими операциями над множеством см. *Теоретико-множественные операции*.

**П р и м е р.** Если  $A$  — множество четных чисел и  $B$  — множество чисел, кратных 3, то  $A \oplus B$  — множество чисел, которые делятся на 2 или на 3, но не делятся на 6.

**СИММЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ** — функция многих переменных, не изменяющаяся при любых *перестановках* переменных, т. е. функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от  $n$  переменных, удовлетворяющая равенству

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}),$$

где  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$  — произвольная подстановка.

Среди С. ф. важными и наиболее изученными являются симметрические многочлены. Основная теорема С. ф.: любая целая рациональная С. ф. представляется единственным образом в виде целой рациональной функции от основных элементарных С. ф.:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n x_i, \sigma_2 = \sum_{i < j=1}^n x_i x_j, \dots, \sigma_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k=1}^n x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, \sigma_n = \prod_{i=1}^n x_i$$

(суммирование распространяется на комбинации неравных между собой чисел  $i_1, i_2, \dots, i_n$ ). Функция называется *кососимметрической*, если меняет знак при перестановке любой пары аргументов. Кососимметрическая функция — многочлен рационально выражается через  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  и  $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$ .

**П р и м е р ы С. ф.:**

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^k, \sum_{i=1}^n x_i^4, \prod_{i=1}^n x_i^2.$$

Лит.: [47].

**СИММЕТРИЧНЫЕ ТОЧКИ:** 1°. С. т. относительно некоторой прямой  $l$  — всякие две точки  $M$  и  $M'$ , лежащие на прямой, перпендикулярной  $l$ , пересекаю-

щей прямую  $l$ , расположенные по разные стороны от  $l$  и на равном от нее расстоянии. Прямая  $l$  при этом называется осью симметрии точек  $M$  и  $M'$ .

**2<sup>0</sup>. С. т. относительно некоторой точки  $O$**  — всякие две точки  $M$  и  $M'$ , лежащие на прямой, проходящей через  $O$ , по разные стороны от точки  $O$  и на одинаковом расстоянии от нее. Точка  $O$  при этом называется центром С. т.

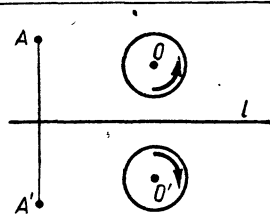


Рис. 90

**3<sup>0</sup>. С. т. относительно некоторой плоскости**

$\alpha$  — всякие две точки  $M$  и  $M'$ , принадлежащие прямой, перпендикулярной плоскости  $\alpha$ , расположенные по разные стороны от плоскости  $\alpha$  и на равном от нее расстоянии.

**СИММЕТРИЯ: 1<sup>0</sup>. С. относительно прямой  $l$** , лежащей в некоторой плоскости  $\alpha$ , — отображение точек этой плоскости на себя, при котором каждая точка  $A$  плоскости переходит в точку  $A'$ , симметричную с первой относительно прямой  $l$  (рис. 90). Прямая  $l$  при этом называется осью С., а С. относительно прямой — осевой С. или отражением от прямой, а также *зеркальным отражением* от прямой. Точки оси С. отображаются сами на себя. Осевая С. есть взаимно однозначное отображение плоскости на себя. Осевая С. есть *инволюция*. Осевая С. есть *перемещение* (изометрия), т. е. длина отрезка при этом преобразовании сохраняется; ориентация фигуры при осевой С. меняется на противоположную. Прямые при осевой С. преобразуются в прямые, при этом прямые, перпендикулярные оси С., преобразуются в себя, а ось С. остается точечно-неподвижной (точечно-инвариантной), каждая точка ее двойная.

Композиция (произведение) двух осевых С. с параллельными осями есть параллельный перенос; композиция же двух осевых С. с пересекающимися осями есть поворот с центром в точке пересечения оси симметрии, но не является С. ни относительно первой, ни относительно второй осей С., т. е. множество всех С. на плоскости относительно заданных осей не обладает свойством замкнутости, кроме того, среди осевых С. нет тождественного преобразования. Другими словами, множество всех осевых С. на плоскости не образует *группы*.

**2<sup>0</sup>. С. относительно точки  $O$** , лежащей в некоторой плоскости  $\alpha$  — *поворот* плоскости  $\alpha$  вокруг точки  $O$  на  $180^\circ$ . Центр поворота  $O$  в этом случае называется центром С., а сама С. в этом случае называется *центральной*. Любая точка  $A$  при центральной С. переходит в точку  $A'$  такую, что точка  $O$  является серединой отрезка  $AA'$ . Центральная С. является перемещением, поэтому всякая фигура  $\Phi$  в этой С. перейдет в конгруэнтную фигуру  $\Phi'$ . Центр С. отобразится сам на себя. Центральная С. является, как и осевая С., взаимно однозначным отображением плоскости на себя и инволюционным преобразованием плоскости. Композиция (произведение) двух центральных С. есть *параллельный перенос* плоскости. При центральной С. всякая прямая переходит в параллельную ей прямую.

С. называют также свойство фигуры, симметричной относительно прямой (оси), или точки (центра), или относительно плоскости.

**3<sup>0</sup>. С. относительно плоскости  $\alpha$**  — отображение (преобразование) пространства на себя, при котором каждая точка  $M$  переходит в симметричную точку  $M'$  относительно данной плоскости  $\alpha$  (см. *Симметричные точки*).

Аналогично рассматривается С. в пространстве относительно точки и

относительно прямой. Всякая  $S$ . относительно прямой, относительно точки или относительно плоскости связана с понятием *симметричных точек*, а следовательно, с понятием середины отрезка.

Понятие симметрии на плоскости и в пространстве часто используется при решении задач и доказательстве теорем. См. также: *Инверсия*.

Лит.: [6, 41].

**СИМПЛЕКС.** Одномерным  $S$ . называется отрезок. Двумерный  $S$ . по определению — треугольник, трехмерный  $S$ . — тетраэдр. Здесь треугольник и тетраэдр рассматриваются соответственно как двумерная и трехмерная замкнутая область. В  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $S$ . называется фигура  $n$  измерений, обобщающая понятие треугольника (тетраэдра). Более точно —  $n$ -мерный  $S$ . есть множество точек  $n$ -мерного евклидова пространства, описываемое следующим образом. Пусть  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  означают  $n + 1$  векторов в  $n$ -мерном евклидовом пространстве таких, что любые  $n$  векторов этой системы совокупности составляют базис всего пространства.  $S$ . состоит из точек, задаваемых векторами

$$C_0\xi_0 + C_1\xi_1 + \dots + C_n\xi_n$$

при любых неотрицательных  $C_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ , сумма которых  $C_0 + C_1 + \dots + C_n = 1$  равна единице. Те точки  $S$ ., у которых  $p$  фиксированных коэффициентов  $C_i$  равны нулю, образуют  $(n - p)$ -мерную грань  $S$ ., которая, очевидно, является  $(n - p)$ -мерным  $S$ . Таким образом,  $S$ . обладает  $C_{n+1}^{n-p}$  гранями размерности  $n - p$ , в частности число  $(n - 1)$ граней равно  $n + 1$ . Среди всех многогранников  $n$ -мерного евклидова пространства  $S$ . имеет наименьшее количество  $(n - 1)$ -мерных граней. В этом смысле  $S$ . является наиболее простым многогранником.

$S$ . является важным понятием комбинаторной топологии, свойства  $S$ . используются в математических методах экономики (симплекс-метод).

Лат. simplex — простой.

Лит.: [68].

**СИМПСОНА ФОРМУЛА:** 1°.  $S$ . ф. для интеграла — формула для приближенного вычисления интегралов. То же самое, что *парабол формула*.

2°.  $S$ . ф. для объемов тел — формула для вычисления объемов тел с двумя параллельными основаниями, секущими коническую поверхность:  $V = (h/6) (Q_H + Q_B + 4Q_C)$ , где  $Q_H$  — площадь нижнего основания,  $Q_B$  — площадь верхнего основания,  $Q_C$  — площадь среднего сечения тела. Под средним сечением тела здесь понимается фигура, полученная от пересечения тела с плоскостью, параллельной плоскостям оснований и находящейся на равном расстоянии от этих плоскостей. Через  $h$  обозначена высота тела.

Из  $S$ . ф., как частный случай, получаются многие известные формулы объемов тел, изучаемые в школе (усеченной пирамиды, цилиндра, шара и др.).

**СИМСОНА ПРЯМАЯ** — соответствующая точке  $M$  окружности  $\omega$  прямая, на которой расположены основания трех перпендикуляров, проведенных из любой точки  $M$  окружности  $\omega$  на стороны треугольника (или их продолжения), вписанного в эту окружность.  $S$ . п. названа в честь Симсона Р. (1687—1768). Теорему об этой прямой на самом деле доказал В. Уоллес (1797) через тридцать лет после смерти Симсона.

См. также: *Стьюарта теорема*.

Лит.: [41].

**СИНГУЛЯРНАЯ МАТРИЦА** — то же, что вырожденная матрица.

**СИНУС** — одна из тригонометрических функций, обозначаемая  $\sin: R \rightarrow R$  и определяемая следующим образом. Пусть в ориентированной евклидовой плоскости выбраны прямоугольная декартова система координат  $xOy$  (рис. 91) и произвольный угол  $AOM$ , вершина которого совпадает с началом координат, неподвижная (фиксированная) сторона его совпадает с полуосью  $Ox$ , а подвижная (переменная) сторона  $OM$  при повороте (вращении) вокруг вершины  $O$  составит различные углы с положительным направлением оси  $Ox$ , величину которых обозначим через  $\alpha$  (или числа радианов  $x$ ). Тогда  $C.$  угла  $\alpha$  (или  $x$ ) называется отношение  $y:|OM| = y:r$ , где  $y$  — ордината точки  $M$ , принадлежащей подвижной стороне  $OM$  угла  $\alpha$ , а  $|OM|$  — длина подвижного радиуса точки  $M$ , т. е.  $|OM| = r$ . Если  $r = 1$ , то окружность называется единичной и  $C.$  угла  $\alpha$  будет отношение  $y_m:1$ , т. е.  $\sin \alpha = y_m$ . Таким образом,  $C.$  угла  $\alpha$  называется ордината точки  $M$  единичной окружности, где точка  $M$  принадлежит также подвижной стороне  $OM$  угла  $\alpha$ .  $C.$  является функцией угла  $\alpha$  (или числового аргумента  $x$ ). При любом целом  $n$  поворот на угол  $\beta = \alpha + 360^\circ \cdot n$  совпадает с поворотом на угол  $\alpha$ . Итак, при  $n \in Z$  имеем:  $R_O^\alpha(A) = M = R_O^{\alpha+360^\circ \cdot n}(A)$ ; поворот  $R_O^\alpha$  и  $R_O^{\alpha+360^\circ \cdot n}$  отображает точку  $A$  на точку  $M$ , т. е.  $\sin(\alpha + 360^\circ \cdot n) = \sin \alpha$ . Областью определения  $C.$  является вся числовая ось, областью значений — числовой отрезок  $[-1; 1]$ .  $C.$  — функция ограниченная, нечетная и периодическая. Наименьший положительный период  $C. T = 2\pi$ , т. е. имеет место равенство  $\sin x = \sin(x + 2\pi n)$ , где  $n \in Z$ .

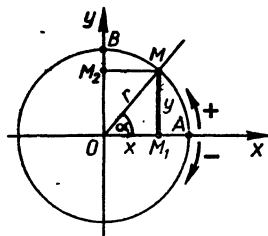


Рис. 91

С возрастаньем угла от 0 до  $\frac{\pi}{2}$   $C.$ , как и тангенс, возрастает.

$C.$  и косинус одного и того же аргумента связаны соотношением (тригонометрическим тождеством)  $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$ , где  $\alpha$  — любое числовое значение величины угла (в градусах или радианах). Левая часть этого равенства (формулы) называется тригонометрической единицей.  $C.$  и косеканс связаны зависимостью  $\sin x = 1: \operatorname{cosec} x$ .

Производная  $C.$  вычисляется по формуле  $(\sin x)' = \cos x$ ; для  $x = 0$  имеем:  $(\sin x)_{x=0}' = \cos 0 = 1$ , т. е. угловой коэффициент касательной, проведенной к синусоиде  $y = \sin x$  в точке с абсциссой  $x = 0$  ( $y = 0$ ), равный тангенсу угла наклона этой касательной с положительным направлением оси  $Ox$ , равен 1. Этот факт используется при построении графика  $C.$  — синусоиды; для  $x > 0$  синусоида лежит ниже прямой  $y = x$ , а для  $x < 0$  — выше этой прямой. Интеграл от  $C.$  находится по формуле  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ .  $C.$  разлагается в степенной ряд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (-\infty < x < \infty);$$

этот ряд используется для вычисления приближенных значений  $C.$

Функция, обратная С. на промежутке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , называется *арксинусом*.

Если ограничиться рассмотрением только острого угла  $\alpha$ , то С. угла  $\alpha$  можно определить как отношение длины катета, противолежащего углу  $\alpha$ , к длине гипотенузы (следует из рассмотрения треугольника  $ОММ_1$ ).

С. и косинус комплексного аргумента  $z$  связаны с показательной функцией формулой Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

из которой получаются формулы, выражающие  $\sin x$  и  $\cos x$  ( $x$  — действительное число) через показательную функцию чисто мнимого аргумента:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Если  $z = ix$ , то  $\sin ix = i \frac{e^x - e^{-x}}{2} = i \operatorname{sh} x$ , где  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  — *гиперболический синус*.

В комплексной плоскости функция  $\sin z$  может принимать любые сколь угодно большие значения. С. комплексного аргумента представляет собой *аналитическую функцию*.

Лат. *sinus* — тетива, изгиб, выпуклость, вздутие.

См. также: *Синусоида*, *Синусов теорема*.

**СИНУС ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ** — см. *Гиперболический синус*.

**СИНУС-ВЕРЗУС** угла  $\alpha$  — некоторая функция угла  $\alpha$ , обозначаемая  $\sinvers \alpha$ , значение которой равно  $1 - \cos \alpha$ . Понятие С.-в. было введено в математику в XVII в., а в настоящее время не употребляется. П. Л. Чебышев предполагал, что понятие С.-в. будет играть в математике важную роль.

Лат. *sinus* — тетива, изгиб, *versus* — обращенный, *sinvers* — обращенный синус.

**СИНУСОВ ТЕОРЕМА** — теорема плоской тригонометрии, устанавливающая зависимость между сторонами (их длинами)  $a, b, c$  произвольного треугольника и синусами противолежащих этим сторонам углов:

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R,$$

где  $R$  — радиус описанной вокруг треугольника окружности.

Для сферической тригонометрии С. т. аналитически выражается так:

$$\frac{\sin a}{\sin \widehat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \widehat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \widehat{C}},$$

т. е. синусы сторон сферического треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов (величин углов).

**СИНУСОИДА** — график тригонометрической функции  $y = \sin x$  в прямоугольной декартовой системе координат (рис. 92).

Прямая  $y = x$  является касательной к С. в начале координат; поэтому для  $x > 0$  С. расположена под прямой  $y = x$ , а для  $x < 0$  — над прямой  $y = x$ . График функции  $y = \cos x$  (косинусоида) есть также С., сдвинутая влево параллель-

но оси  $Ox$  на  $\pi/2$ , так как  $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Графики функций вида  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  называют синусоидальными кривыми, которые получаются из  $C$ .  $y = \sin x$  путем ее сдвига вдоль

оси  $Ox$  на  $\left(-\frac{\varphi}{\omega}\right)$  и сжатия (растяжения) в  $\omega$  раз по оси  $Ox$ , а также растяжения (сжатия) в  $A$  раз по оси  $Oy$ . При этом число  $A$  называется *амплитудой* (размахом),  $\omega$  — частотой,  $\varphi$  — начальной фазой колебания.

С. часто встречается при изучении электротехники, механики и других разделов физики.

Так, колебания математического маятника, колебания тока и напряжения в электрическом колебательном контуре являются примерами синусоидальных колебаний, если пренебречь затуханиями.

Проекция (ортогональная) *винтовой линии* на плоскость осевого сечения кругового цилиндра есть синусоидальная кривая, амплитуда которой равна радиусу цилиндра, а период равен шагу винтовой линии.

Для практического получения модели  $C$ . (синусоидальной кривой) можно поступить так: взять стеариновую свечу и обернуть ее несколько раз тонкой бумагой, а затем разрезать под углом (рис. 93, а), не равным  $90^\circ$ , к ее оси. Тогда развертка бумаги (рис. 93, б) даст модель  $C$ .

См. также: *Косинусоида, График функции.*

**СИСТЕМА КООРДИНАТ** — совокупность условий, определяющих положение точки на прямой, на плоскости, в пространстве. Впервые понятие  $C$ . к. было введено в геодезии и астрономии для определения положения точки на земной поверхности или на небесной сфере. В XIV в. французский математик Н.Орезм пользовался  $C$ . к. на плоскости для построения графиков. Он употреблял понятия долготы и широты, соответствующие нашим понятиям абсциссы и ординаты. В XVII в. благодаря трудам французского ученого Декарта было выяснено все значение метода координат, позволяющего переводить задачи геометрии на язык алгебры и математического анализа и, обратно, давать различным результатам алгебры и математического анализа геометрическую интерпретацию. О различных  $C$ . к. см.: *Координаты, Аффинные координаты, Декартовы координаты, Криволинейные координаты, Сферические координаты.*

Лат. со (sum) — приставка, означающая — совместно, и ordinatus — упорядоченный, определенный.

**СИСТЕМА ОБРАЗУЮЩИХ** (универсальной) алгебры. Пусть в (универсальной) алгебре  $G$  дано непустое подмножество  $M$ . Пересечение  $\Pi$  всех подалгебр алгебры  $G$ , содержащих  $M$ , называется подалгеброй, порожденной подмножеством  $M$ , а множество  $M$  называется  $C$ . о. этой подалгебры  $\Pi$ . Если подалгебра, порожденная множеством  $M$ , совпадает со всей алгеброй  $G$ , то множество  $M$  называется  $C$ . о. алгебры  $G$ . Если в алгебре  $G$  существует  $C$ . о.  $M$ , состоящая из конечного числа элементов, то  $G$  называется конечно-порожденной алгеброй или алгеброй с  $8^*$

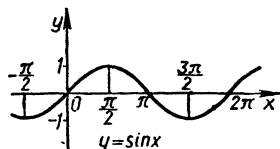


Рис. 92

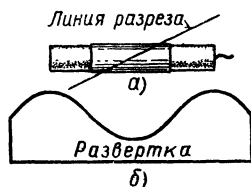


Рис. 93



конечной системой образующих. Легко видеть, что всякий элемент алгебры  $G$  является либо элементом С. о.  $M$ , либо представим в виде результата (конечного числа) операций, определенных в  $G$ , над некоторыми элементами из  $M$ .

Например, если алгебра  $G$  является *группой*, имеющей С. о.  $M = \{a_\alpha\}$ , где  $\alpha$  пробегает некоторое множество  $\mathfrak{M}$ , то всякий элемент  $G$  представим в виде произведения элементов из  $M$  и обратных к ним.

Лит.: [48, 55].

**СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ** — способ обозначения и наименования натуральных чисел.

После введения десятичных дробей десятичная позиционная С. с. стала общепризнанным средством записи не только натуральных чисел, но и действительных чисел.

С. с. называется также *нумерацией*.

См. также: *Римские цифры, Славянские цифры, Систематические дроби, Основание системы счисления, Пеано аксиомы*.

**СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ** — множество уравнений с  $n$  ( $\geq 2$ ) неизвестными  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , для которых требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющих одновременно всем уравнениям системы. Совокупности  $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$  искомым значениям неизвестных, удовлетворяющие всем уравнениям системы, называются решениями системы. Две С. у. называются равносильными, если каждое решение одной С. у. является решением другой С. у. и наоборот, причем обе С. у. рассматриваются в одной и той же области.

Всякая С. у., равносильная С. у. вида  $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ . С. у., у которых функции  $f_k$  являются многочленами от  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , называется алгебраической. Простейшим случаем С. у. являются системы линейных алгебраических уравнений (см. *Линейное уравнение*).

Система *дифференциальных уравнений* — конечное или бесконечное множество дифференциальных уравнений, для которых требуется найти все функции, удовлетворяющие каждому из этих уравнений.

**СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ДРОБИ** — дроби, записанные в определенной позиционной системе счисления (нумерации). Пусть в качестве основания позиционной системы взято число  $k$ ; тогда говорят о представлении чисел  $k$ -ичной С. д. Наиболее удобными и употребительными являются десятичные дроби, т. е. С. д., отнесенные к позиционной системе счисления с основанием 10. Числа в  $k$ -ичной С. д.  $0, 1, 2, \dots, k-1$  называют цифрами. Пусть дана бесконечная последовательность цифр:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots, a_n, \dots, 0 \leq a_i < k$ . Тогда бесконечный ряд

$$\frac{a_1}{k} + \frac{a_2}{k^2} + \frac{a_3}{k^3} + \dots + \frac{a_n}{k^n} + \dots \quad (*)$$

называют  $k$ -ичной С. д. Исключаются из рассмотрения такие последовательности, в которых все  $a_n$  начиная с некоторого места равны  $k-1$ . Обычно такую дробь записывают в известной форме  $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  С. д. вида (\*) называют конечной, если начиная с некоторого места все ее цифры равны нулю, и бесконечной в противном случае.

Если  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{k^i} = \alpha$ , то говорят, что С. д. представляет число  $\alpha$  или что она равна  $\alpha$ . В этом случае для любого  $n \geq 0$  разность  $0 \leq \alpha - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{k^i} < \frac{1}{k^n}$ .

Любое действительное число  $\alpha$  отрезка  $0 \leq \alpha < 1$  представляется одной и только одной  $k$ -ичной С. д. Всякая периодическая  $k$ -ичная С. д. представляет некоторое рациональное число.

**СКАЛЯР** — величина, значение которой характеризуется одним числом без учета направления или другой какой-либо оценки, например: площадь, объем, температура и др. В векторной алгебре С. называется в отличие от вектора любое действительное число. С. также называется скалярной величиной.

**СКАЛЯРНАЯ МАТРИЦА** — квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C \end{pmatrix}.$$

т. е. матрица, в которой  $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ C & \text{при } i = j. \end{cases}$

Множество всех С. м. над кольцом (полем)  $k$  образует кольцо, изоморфное кольцу (полю)  $k$ .

**СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ** двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — число, равное  $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$ , где  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$  — модули векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , а  $\alpha$  — угол между этими векторами. С. п. векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается так:  $(\vec{a}, \vec{b})$ ; таким образом,  $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$ . С. п. двух векторов может быть выражено и так:  $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \text{пр. } \vec{b}_a = |\vec{b}| \text{пр. } \vec{a}_b$ , где  $\text{пр. } \vec{a}_b$  или  $\text{пр. } \vec{b}_a$  — соответственно проекция вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  и проекция вектора  $\vec{b}$  на вектор  $\vec{a}$ .

Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имеют в прямоугольной декартовой системе на плоскости координаты  $\vec{a}(x_1, y_1)$ ,  $\vec{b}(x_2, y_2)$ , то С. п. этих векторов может быть выражено так:  $(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ . Аналогичная формула имеет место и для пространства трех и большего числа измерений. С. п. обладает свойствами: 1)  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$  (свойство коммутативности); 2)  $\alpha (\vec{a}, \vec{b}) = (\alpha \vec{a}, \vec{b})$  (свойство ассоциативности относительно скалярного множителя); 3)  $(\vec{a}, (\vec{b} + \vec{c})) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$  (свойство дистрибутивности); 4)  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$  тогда и только тогда, когда или  $\vec{a} = 0$ , или  $\vec{b} = 0$ , или  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . Если сила  $\vec{F}$  на пути  $\vec{s}$  прямолинейного перемещения тела совершила работу  $A$ , то работа, совершенная телом, может быть выражена С. п.:  $A = (\vec{F}, \vec{s})$ . С. п.  $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$  называется скалярным квадратом вектора  $\vec{a}$ . Понятие С. п. находит большое применение в аналитической геометрии, физике и т. д.

В гильбертовых и  $n$ -мерных евклидовых пространствах С. п. определяется как положительно определенная билинейная форма, удовлетворяющая условию 4. См. также: *Векторное произведение*.

Лит.: [6,79].

**СКОБКИ** — математические знаки:  $( )$ ,  $[ ]$ ,  $\{ \}$ ,  $\langle \rangle$ , употребляемые для обозначения различных понятий. Так, первые скобки, называемые круглыми, употребляются для обозначения порядка действий (операций, преобразований), а также при обозначении простого и сложного отношения соответственно трех и четырех точек, при обозначении матрицы и координат точек плоскости и пространства, при обозначении прямой (обозначение прямой  $AB$ :  $(AB)$ ), при обозначении лучей, а иногда и интервалов (открытых промежутков) и при обозначении упорядоченных пар и троек, вообще «энок» (см. *Кортеж*) чисел и при других обозначениях. Вторые и третьи скобки называются квадратными или прямоугольными (третьи называют вывернутыми квадратными или вывернутыми прямоугольными), используются при обозначении числовых промежутков (отрезков), как конечных, так и бесконечных (лучей числовой прямой, а также самой числовой прямой), вторые скобки используются при обозначении также целой части числа  $x$ , при обозначении векторного и смешанного произведения векторов. Четвертые скобки, называемые фигурными, используются при обозначении множества, если указываются его элементы, при обозначении дробной части числа  $x$ . Наконец, пятые скобки, называемые угловыми или угловыми, используются при обозначении (наряду с первыми круглыми скобками) упорядоченной пары, тройки и вообще *кортежа*.

См. также: *Знаки математические, Упорядоченное множество.*

**СКОЛЬЗЯЩИЙ ВЕКТОР** — вектор, начало которого можно произвольно выбирать на прямой, на которой расположен вектор. С. в., таким образом, может свободно скользить по прямой, на которой он расположен, не изменяя своего направления. С. в. в отличие от свободного вектора нельзя, вообще говоря, перенести с одной прямой на другую. Так, сила, приложенная к твердому телу, является примером С. в. Понятие С. в. часто используется в физике.

См. также: *Вектор, Связанный вектор, Свободный вектор.*

**СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ** — прямые, не лежащие в одной плоскости. Если прямые  $a$  и  $b$  — С. п., то можно провести единственную пару параллельных плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ , где  $a \subset \alpha$ ,  $b \subset \beta$ , и бесконечное множество взаимно перпендикулярных пар плоскостей, из которых одна плоскость содержит прямую  $a$ , а вторая, ей перпендикулярная, содержит прямую  $b$ . Если плоскости  $\alpha \parallel \beta$  и  $\alpha \supset a$ ,  $\beta \supset b$ , то расстояние между параллельными плоскостями будет равно расстоянию между С. п. С. п. обозначаются знаком  $\times$ .

**СЛАВЯНСКИЕ ЦИФРЫ** — *цифры*, применявшиеся древними славянами для обозначения чисел в алфавитной системе нумерации (счисления), возникшей в X в. Считают, что алфавитное обозначение чисел было введено одним из составителей славянского алфавита — Кириллом (умер в 869 г.). Система обозначения чисел была построена по типу ионийской системы нумерации (Древняя Греция), которой пользовались византийцы; числовые значения получили лишь буквы, соответствовавшие буквам греческого алфавита. Эта славянская система именовалась *к и р и л л и ц е й*. Во втором славянском способе обозначения чисел — *г л а г о л и ц е* — сходство с ионийской системой отсутствует; в этой алфавитной нумерации значения букв строго соответствуют их алфавитному порядку. В обеих системах для выделения в тексте чисел над каждой буквой или над всем числом ставился особый знак (титло).

В славянском языке для наименования высших десятичных разрядов употреблялись названия «малое число», в котором названия не шли далее  $10^6$ , и «великое число», в которое входили числа до  $10^{60}$ . При этом одни и те же названия обозначали в обеих системах различные числа. Так, тьма обозначала 10 000 в малом числе и 1 000 000 в великом числе. Легион обозначал в малом числе 10 тём, а в великом числе — тьму тём и т. д. Число  $10^{60}$  называли колодой. Буквы алфавита, соответствующие числам 1—9, обведенные кружком, обозначали тьмы, а обведенные кружком из черточек — легионы, а кружком из лучей — леодры (леодр в малом числе равнялся 10 легионам, т. е.  $10^6$ , а в великом —  $10^{24}$  — легион легионов). Леодр леодров ( $10^{48}$ ) назывался в о р о н о м.

См. также: *Римские цифры, Система счисления, Нумерация.*

### СЛЕД МАТРИЦЫ

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

равен сумме элементов главной диагонали, т. е. С. м.  $A$  равен  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ . С. м.  $A$  является коэффициентом (с противоположным знаком) при  $x^{n-1}$  в характеристическом уравнении матрицы  $A$ . С. м. является инвариантом матрицы относительно преобразования  $A \rightarrow C^{-1}AC$ , где  $C$  — невырожденная матрица. С. м. определяется лишь для квадратных матриц.

**СЛЕД ПЛОСКОСТИ** — линия пересечения этой плоскости с одной из плоскостей проекций: горизонтальной  $H$ , вертикальной  $V$  или фронтальной  $W$ . Термин С. п. употребляется в начертательной геометрии.

**СЛЕД ПРЯМОЙ** — точка пересечения этой прямой с одной из плоскостей проекций: горизонтальной  $H$ , вертикальной  $V$  или фронтальной  $W$ . Термин С. п. употребляется в начертательной геометрии. Точка пересечения (точка встречи) прямой с горизонтальной плоскостью проекций называется горизонтальным следом; аналогичное название имеют следы на других плоскостях проекций.

См. также: *След плоскости.*

**СЛОВО** — конечная последовательность букв какого-либо алфавита. Число букв в С. называется длиной С. Буквы алфавита могут рассматриваться как слова длины 1. Наряду со С. положительной длины рассматривают пустое С., не содержащее ни одной буквы (обозначается часто  $\Lambda$ ). Если даны два С.  $A$  и  $B$  (в каком-либо алфавите), то, выписывая (слева направо) сначала все буквы С.  $A$ , а затем приписывая к ним справа подряд все буквы слова  $B$ , получим новое С.  $AB$ , называемое композицией С.  $A$  и  $B$ . Множество всех слов данного алфавита составляет формальный язык, который относительно операции композиции слов образует полугруппу (с сокращением и с единицей, которой является пустое С.).

**Пример.** В алфавите  $A = \{a, b, h, g, =, <\}$  выражение  $ah = b, gagg <$ ,  $\Lambda, ah = bgagg <$  будут С. соответственно длин 4, 5, 0, 9. При этом последнее слово будет композицией первого и второго.

Лит.: [27, 28].

**СЛОЖЕНИЕ; 1<sup>о</sup>. С. натуральных чисел** — одна из бинарных операций на множестве  $N$ , т. е. С. — это некоторое отображение прямого произве-

д е н и я (декартового произведения, декартового квадрата)  $N^2$  в  $N$ . Обозначается  $S$ . натуральных чисел знаком «+». Если  $a$  и  $b$  — два натуральных числа, то число  $c = a + b$  называется с у м м о й чисел  $a$  и  $b$  или результатом  $S$ . этих чисел. Аналогично определяется  $S$ . на других множествах чисел. При  $S$ . справедлив коммутативный (переместительный) закон  $a + b = b + a$  и сочетательный (ассоциативный) закон  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

2°. Кроме  $S$ . чисел, в математике также рассматривают  $S$ ., выполняемое над другими объектами: *многочленами, векторами, матрицами* и т. д.

**СЛОЖНАЯ ДРОБЬ** — выражение вида  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ , где  $a, b, c, d$  — числовые вы-

ражения или выражения с переменной.  $S$ . д. — это дробь, у которой числитель и знаменатель являются также дробями.  $S$ . д. иногда называют «многоэтажной» или составной дробью. Термин  $S$ . д. малоупотребителен. Однако сравните: *Сложное отношение, Сложные проценты*.

См. также: *Десятичная дробь, Непрерывная дробь*.

**СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ**. Если  $z$  есть функция от  $y$ , а  $y$  в свою очередь есть функций от  $x$ , то функция  $f(x) = z(y(x))$  называется  $S$ . ф. (иначе, композицией функций от  $x$ , а также суперпозицией функций). Переменная  $x$  называется независимой переменной  $S$ . ф.  $f$ , а  $y$  — промежуточной переменной. Если  $z = f_1(y_1)$ ,  $y_1 = f_2(y_2)$ ,  $y_2 = f_3(y_3)$ , ...,  $y_{n-1} = f_n(x)$ , то при обычных предположениях дифференцируемости

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df_1}{dy_1} \cdot \frac{df_2}{dy_2} \cdots \frac{df_{n-1}}{dy_{n-1}} \cdot \frac{df_n}{dx}.$$

Эту формулу называют формулой дифференцирования  $S$ . ф. Например, пусть  $y = \cos x$  и  $z = \sqrt{1 - y^2}$ . Тогда  $z = \sqrt{1 - \cos^2 x}$  будет  $S$ . ф.

**СЛОЖНОЕ ОТНОШЕНИЕ** четырех точек (обозначается  $(ABCD)$ ), расположенных на одной прямой проективного пространства, — число, равное частному от деления *простых отношений трех точек*:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

Здесь  $(ABC)$  — простое отношение точек  $A, B, C$ .

Аналогично записывается  $S$ . о. четырех прямых (лучей) пучка:

$$abcd = \frac{(abc)}{(abd)},$$

где  $(abc)$  — простое отношение прямых  $a, b, c$ .  $S$ . о. — одно из основных понятий *проективной геометрии* и важнейший *инвариант проективных преобразований*, в то время как в аффинной геометрии одним из основных инвариантов является *простое отношение трех точек* (прямых).

$S$ . о. четырех точек используется при доказательстве ряда теорем проективной геометрии, в частности теоремы Чевы и теоремы Менелая.  $S$ . о. четырех элементов может равняться любому действительному числу. Если  $S$ . о. равно  $(-1)$ , то оно называется *г а р м о н и ч е с к и м*.  $S$ . о. иначе называют двойным и реже — *ангармоническим отношением*.

Лит.: [93].

**СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ** — *проценты*, начисляемые на первоначаль-

ный взнос (вклад)  $a$ , внесенный в сберегательную кассу, по формуле  $a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ , где  $t$  — число лет. Таким образом, при С. п. вклад  $a$  возрастает в геометрической прогрессии со знаменателем  $q = 1 + p/100$ . См. также: *Промилле*, *Процент*.

**СЛОЙ ШАРОВОЙ** — см. *Шаровой слой*.

**СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА** — величина, которая может принимать от случая к случаю то или иное свое значение. Задается законом распределения (см. *Распределения закон*). С. в. делятся на величины, распределенные дискретно и непрерывно. Дискретные случайные величины принимают каждое свое значение с определенной вероятностью, в то время как непрерывные случайные величины характеризуются плотностью вероятности.

Многие свойства С. в. описываются *математическим ожиданием и дисперсией*.

Лит.: [17, 26, 32, 39, 43, 83].

**СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ** (в теории вероятностей) — событие, которое может произойти, а может и не произойти. Наступление С. с. характеризуется вероятностью или плотностью вероятности. Вероятность С. с. характеризует частоту наступления С. с., если указанные события повторяются большое количество раз. Последнее утверждение составляет содержание закона больших чисел (см. *Больших чисел закон*), а также теоремы Лапласа (см. *Лапласа теорема*).

**СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС** (в теории вероятностей) — случайная величина, зависящая от времени, процесс, течение которого (обычно задаваемое функцией времени) случайно и может быть описано в терминах теории вероятностей. Теория С. п. имеет многочисленные и важные приложения к физике, технике (броуновское движение, распространение радиосигналов при наличии помех и т. п.). Главные результаты теории С. п. получены русскими учеными А. А. Марковым (старшим), А. Н. Колмогоровым, А. Я. Хинчиным и др., а также американскими математиками В. Феллером, Н. Винером, Дж. Дубом и др. В настоящее время теория С. п. быстро развивается.

Лит.: [17].

**СМЕЖНЫЕ УГЛЫ** — два угла, объединение которых — развернутый угол, а пересечение — луч. С. у. имеют общую сторону — луч, а две другие их стороны составляют одну прямую. Сумма величин С. у. равна  $180^\circ$ , или  $2d$ , или  $\pi$  радианам.

**СМЕЖНЫЙ КЛАСС** некоторой группы  $G$  по ее подгруппе  $H$  — это множество всех элементов вида  $ah$ , где  $h$  — произвольный элемент подгруппы  $H$ , а  $a$  — фиксированный элемент группы  $G$ . Этот С. к. называется левым С. к. и обозначается  $aH$ . Аналогично определяется правый С. к.  $Ha$ . Если подгруппа  $H$  является *нормальным делителем* группы  $G$ , то ее левые и правые С. к. совпадают, т. е.  $aH = Ha$ .

При произвольном  $b \in G$  С. к.  $bH$  либо совпадает как подмножество со С. к.  $aH$ , либо  $aH \cap bH = \emptyset$ . Поэтому если  $a$  пробегает множество всех элементов группы  $G$ , то множество всех левых (правых) С. к. образует *разбиение* множества  $G$ .

Множество всех С. к. группы  $G$  по нормальному делителю  $H$  образует *фактор-группу*  $G/H$ .

В *кольце* также возникает понятие С. к., и соответственно изучаются фактор-кольца по *идеалам*.

Лит.: [37, 48].

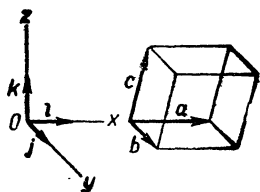


Рис. 94

**СМЕШАННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ** — частная производная высшего порядка, взятая по различным переменным, например:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z},$$

где  $u = u(x, y, z)$ .

О равенстве смешанных производных см. *Перестановка дифференцирований*.

**СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ** трех векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  — число, равное скалярному произведению векторов, один из которых равен векторному произведению  $[\vec{a}\vec{b}]$  первых двух векторов, а второй равен вектору  $\vec{c}$ . Итак, С. п. трех векторов равно  $[\vec{a}\vec{b}] \cdot \vec{c}$ .

С. п. трех векторов геометрически равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах (рис. 94), взятому со знаком «плюс», если тройка векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  имеет ту же ориентацию, что и тройка координатных векторов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , и взятому со знаком «минус», если эти тройки имеют противоположную ориентацию.

С. п. трех векторов не изменяется при круговой (циклической) перестановке векторов и изменяет свой знак на противоположный при нарушении круговой перестановки векторов (сомножителей).

Если координаты данных векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  соответственно равны:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3),$$

то С. п. этих векторов выразится через их координаты в виде определителя третьего порядка:

$$[\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

С. п. равно нулю в том и только в том случае, если три вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  *компланарны*. Понятие С. п. трех векторов используется при вычислении объема тетраэдра и параллелепипеда, построенных на этих векторах. С. п. трех векторов иначе называется *векторно-скалярным произведением* этих векторов. Кроме обозначения  $[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}$ , С. п. также обозначают и так:  $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ .

См. также: *Вектор, Компланарные векторы, Коллинеарные векторы*.

Лит.: [6; 79].

**СМЕШАННОЕ ЧИСЛО** — число, состоящее из целой и дробной частей.

Например,  $3\frac{2}{5}, -1\frac{1}{7}$  — С. ч. Термин С. ч. выходит из употребления.

См. также: *Дробь, Обыкновенная дробь, Десятичная дробь, Число*.

**СОБСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ** линейного дифференциального или интегрального оператора  $A$  — функция  $f$ , обладающая свойством:

$$Af = \lambda f, \quad f \neq 0,$$

где  $\lambda$  — постоянная. Число  $\lambda$  называется собственным значением. Например,  $y$

оператора  $L(y) = -y''$  в пространстве дважды дифференцируемых функций, равных нулю на концах отрезка  $[0; \pi]$ , собственными значениями являются числа  $\lambda_n = n^2$ , а собственными функциями — функции  $y_n = \sin nx$ , так как  $y_n'' = -n^2 y_n$ .

**СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ** — см. *Собственная функция и Собственный вектор*.

**СОБСТВЕННОЕ ПОДМНОЖЕСТВО** множества  $A$  — всякое подмножество множества  $A$ , отличное от *пустого множества* и от самого множества  $A$ . С. п. множества  $A$  называют также правильной частью множества  $A$  или истинным подмножеством множества.

**СОБСТВЕННОЕ ЧИСЛО** — см. *Собственный вектор*.

**СОБСТВЕННЫЙ ВЕКТОР** — понятие линейной алгебры. Пусть в линейном (векторном) пространстве  $P$  задано линейное преобразование  $H$ . Если преобразованием  $H$  вектор  $\vec{b}$ , отличный от нуля, переводится в вектор, пропорциональный самому  $\vec{b}$ , т. е.  $H\vec{b} = \lambda\vec{b}$ , где  $\lambda$  — некоторое число, то вектор  $\vec{b}$  называется С. в. преобразования  $H$ . Число  $\lambda$  называют собственным значением, собственным числом или корнем преобразования  $H$  и говорят, что С. в.  $\vec{b}$  принадлежит собственному значению  $\lambda$ . Другими словами, С. в. линейного преобразования — это такие векторы, которые при данном преобразовании остаются параллельными (коллинеарными) самим себе.

Собственные значения  $\lambda$  линейного оператора  $A$  в  $n$ -мерном пространстве удовлетворяют *характеристическому уравнению*

$$\det \|a_{ij} - \lambda \delta_{ij}\| = 0,$$

где  $a_{ij}$  — матрица оператора  $A$  в произвольном базисе, а

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

После вычисления соответствующего собственного значения С. в.  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  может быть определен из системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \lambda x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

С. в. и собственные значения являются важнейшими характеристиками линейного оператора. Если из С. в. оператора  $H$  можно составить базис в пространстве  $P$ , то матрица оператора  $H$  в этом базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — собственные значения  $H$ .

Лит.: [79].

**СОВЕРШЕННОЕ МНОЖЕСТВО** — *замкнутое множество*, не имеющее *изолированных точек*. Примером является канторово С. м. (см. *Канторово множество*). Всякое непустое С. м. в евклидовом пространстве имеет мощность континуума. Мера С. м. может равняться нулю.



**СОВЕРШЕННОЕ ЧИСЛО** — натуральное число  $n$ , сумма натуральных делителей которого, за исключением самого числа, равна  $n$ . Например, числа 6, 28, 496 и др. С. ч. были введены в «Началах» Евклида. Евклиду было известно четыре С. ч. В настоящее время известно более двадцати четных С. ч. Однако не решен вопрос о том, конечно-или бесконечно множество С. ч. Неизвестно также, существуют ли нечетные С. ч. С древности известно, что всякое четное число является С. ч. тогда и только тогда, когда оно имеет вид:  $2^{p-1}(2^p-1)$ , где  $p$  и  $2^p-1$  — простые числа.

Самым большим С. ч., известным к 1957 г., было  $2^{3216}(2^{3217}-1)$ . С помощью ЭВМ были найдены большие С. ч., например  $2^{4422}(2^{4423}-1)$  в 1962 г. и  $2^{11212}(2^{11213}-1)$  в 1965 г.

**СОВМЕСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ** — система уравнений, для которой существуют значения неизвестных (переменных), удовлетворяющие всем данным уравнениям. Геометрически совместность системы уравнений означает существование общих точек у многообразий, изображаемых этими уравнениями.

См. также: *Система уравнений, Несовместная система, Многообразие.*

**СОДРУЖЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА** — два числа, каждое из которых равно сумме делителей другого; при этом делители рассматриваются все положительные, кроме самих чисел.

Например, числа 220 и 284 — С. ч. Делителями числа 220 являются числа 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110; их сумма равна 284. Делителями числа 284 являются числа 1, 2, 4, 71, 142; сумма этих чисел равна 220.

С. ч. были известны в школе Пифагора, где им придавали мистический смысл. В то время было известно 4 пары С. ч. До сих пор неизвестно, конечное или бесконечное множество этих чисел. С. ч. иначе называются *дружественными числами*.

Лит.: [14].

**СОЕДИНЕНИЕ** — собирательный термин комбинаторики. Под С. понимают *сочетания, размещения, перестановки* без повторений. С. с повторениями суть соответственно *сочетание с повторениями, размещение с повторениями* и *перестановка с повторениями*.

**СОИЗМЕРИМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ** — *величины* одного и того же рода, имеющие общую меру. Величины, не имеющие общей меры, называются *несоизмеримыми*. Численное значение отношения С. в. есть число рациональное.

См. также: *Мера множества.*

**СОКРАЩЕНИЕ ДРОБИ** — *тождественное преобразование* дроби, выполняемое с использованием основного свойства дроби, т. е. деления числителя и знаменателя дроби на их общий делитель (не равный нулю). П р и м е р ы: 1)  $3/12 = 1/4$ ; 2)  $a(b+c)/a^2b = (b+c)/ab$ , где  $a, b \neq 0$ .

См. также: *Тождество, Обыкновенная дробь.*

**СООТВЕТСТВЕННЫЕ УГЛЫ** — определенные пары углов, образованные при пересечении двух прямых  $a$  и  $b$ , лежащих в одной плоскости, третьей прямой  $c$ . Так, на рисунке 95 углы 1 и 5, 2 и 6, 4 и 8, 3 и 7 являются С. у. (рис. 95).

Если С. у. конгруэнтны, то прямые  $a$  и  $b$  параллельны. Верно и обратное утверждение: если параллельные прямые  $a$  и  $b$  пересечены третьей прямой  $c$ , то образованные при этом С. у. будут конгруэнтны (в плоскости Евклида).

См. также: Угол, Угол параллельности, Параллельные прямые.

**СООТВЕТСТВИЕ** между множествами  $X$  и  $Y$  (или из  $X$  в  $Y$ ) — всякое подмножество  $\rho$  декартова произведения  $X \times Y$ . Таким образом, указанное соответствие из  $X$  в  $Y$ , называемое также бинарным соответствием, по существу является «многозначной функцией», когда некоторому элементу из  $X$  может быть поставлен в соответствие (сопоставлен) не один, а множество элементов из  $Y$ . Способы задания  $\rho$  различные: оно может быть задано графами (стрелками), таблицами, парами или другим каким-либо способом.

Частным случаем  $\rho$  является функциональное соответствие  $f$ , или функция, т. е. однозначное  $\rho$ , когда каждому  $x \in X$  соответствует единственный  $y = f(x) \in Y$ .

См. также: Отношение, Бинарное отношение, Многозначная функция.

**СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ОКРУЖНОСТЬ** в точке кривой  $M$  — окружность, имеющая с кривой  $l$  в той же точке  $M$  касание порядка  $n \geq 2$ .

Радиус  $\rho$  с. о. является радиусом кривизны кривой  $l$  в точке  $M$ , а центр  $S. o.$  — центром кривизны.

Если кривая плоская и задана уравнением  $y = f(x)$ , то ее радиус кривизны определяется по формуле

$$\rho = \left| \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''} \right|,$$

где  $y'$  и  $y''$  — соответственно первая и вторая производные функции в точке  $x$  (рис. 96).  $S. o.$  в точке  $M$  кривой  $l$  наиболее тесно подходит к этой кривой в окрестности точки по сравнению с любой другой окружностью, проходящей через точку  $M$ .  $S. o.$  кривой лежит в соприкасающейся плоскости.  $S. o.$  называется также с о п р и к а с а ю щ и м с я к р у г о м.

Лит.: [61, 71].

**СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТЬ** в точке  $M$  гладкой кривой  $l$  — плоскость, имеющая с кривой  $l$  в той же точке  $M$  касание порядка  $n \geq 2$ .  $S. п.$  кривой  $l$  в точке наиболее тесно примыкает к кривой  $l$  в окрестности точки  $M$  из всех касательных плоскостей кривой в той же точке  $M$ .  $S. п.$  может быть определена как предельное положение переменной плоскости, проходящей через три точки кривой, когда эти точки стремятся к точке  $M$ .

На рисунке 97 изображена кривая  $l$ , и  $S. п. \alpha$  в том (являющимся общим) случае, когда кривая, соприкасаясь в точке  $M$ , переходит из одного полупространства, определяемого  $S. п.$ , в другое.

Если кривая задана уравнениями:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , то уравнение  $S. п.$  имеет вид:

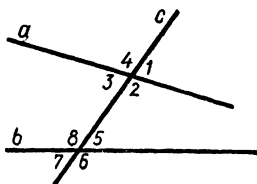


Рис. 95

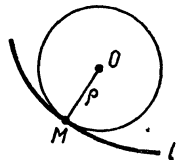


Рис. 96

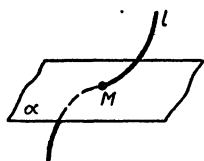


Рис. 97

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0,$$

где  $x, y, z$  — текущие координаты,  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ ,  $z_0 = z(t_0)$  — координаты точки  $M$ , и  $x'_0 = x'(t_0)$ ,  $y'_0 = y'(t_0)$ ;  $z'_0 = z'(t_0)$ ,  $x''_0 = x''(t_0)$ ,  $y''_0 = y''(t_0)$ ,  $z''_0 = z''(t_0)$ .

**СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ СФЕРА** в точке  $M$  гладкой кривой — сфера, имеющая с кривой в точке  $M$  касание порядка  $n \geq 3$ . С. с. может быть определена как предельное положение переменной сферы, проходящей через четыре точки кривой  $l$ , когда они стремятся к точке  $M$ . Радиус С. с. кривой вычисляется по формуле

$$R = \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)^2},$$

где  $\rho$  — радиус кривизны кривой в точке  $M$ ,  $\sigma$  — кручение кривой в той же точке,  $ds$  — дифференциал дуги кривой.

Лит.: [61, 71].

**СОПРИКАСАЮЩИЙСЯ КРУГ** (в дифференциальной геометрии) — круг, ограниченный *соприкасающейся окружностью*.

**СОПРЯЖЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ** — упорядоченная пара дифференцируемых в некоторой области  $D$  плоскости переменных  $x, y$  функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , удовлетворяющих в этой области уравнениям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

С. г. ф. определяют в области  $D$  *аналитическую функцию*  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$ . Каждая из С. г. ф. является гармонической в области  $D$ . Функция  $v$  называется сопряженной с гармонической функцией  $u$  и определяется ею с точностью до постоянной. Сопряженной с  $v$  является функция  $-u$ , т. е.  $v$  и  $-u$  также составляют пару С. г. ф. (Однако  $v$  и  $u$  не составляют пару С. г. ф.) Отношение сопряженности гармонических функций не удовлетворяет условию симметричности.

Лит.: [56].

**СОПРЯЖЕННЫЕ ДИАМЕТРЫ** кривой второго порядка — два диаметра, каждый из которых делит пополам хорды этой кривой, параллельные другому диаметру. С. д. окружности взаимно перпендикулярны. Свойство сопряженности диаметров кривой 2-го порядка сохраняется при параллельном проектировании этой кривой, т. е. является *инвариантом аффинного преобразования*.

Лит.: [61, 71].

**СОПРЯЖЕННЫЕ ЧИСЛА** над полем  $P$  — корни некоторого неприводимого многочлена над полем  $P$ . Например, четыре числа:  $(1 \pm i)(\sqrt{2}/2)$ ,  $(-1 \pm i)(\sqrt{2}/2)$ , являющиеся корнями неприводимого над полем рациональных чисел многочлена  $x^4 + 1$ , будут С. ч. над полем рациональных чисел.

Числа, сопряженные над полем комплексных чисел, называются *комплексно-*

*сопряженными* числами. Взаимно сопряженными комплексными числами является пара чисел вида  $a + bi$  и  $a - bi$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа.

**СОПРЯЖЕННЫЙ КВАТЕРНИОН** с *кватернионом*  $L = a + bi + cj + dk$  есть кватернион  $\bar{L} = a - bi - cj - dk$ .

**СОСТАВНОЕ ЧИСЛО** — натуральное число, имеющее более двух натуральных делителей. Всякое С. ч. единственным образом, с точностью до порядка следования множителей, представляется в виде произведения *простых* чисел. Последнее утверждение часто называют основной теоремой арифметики.

**СОФИЗМ** — преднамеренно неверный вывод, неверное «доказательство» какого-либо утверждения. При этом ошибка в доказательстве бывает довольно искусно замаскирована в одной из цепей доказательства.

Лит.: [57].

**СОФОКУСНЫЕ КРИВЫЕ** — кривые 2-го порядка (конические сечения), имеющие общий фокус. Сравните: сонаправленные лучи, сонаправленные векторы, соизмеримые величины.

С. к. иначе называются *конфокальными кривыми*.

Лат. *con* (*sum*) — вместе, сообща; *focus* — фокус, очаг.

**СОХОЦКОГО ТЕОРЕМА** в теории функций комплексного переменного утверждает, что аналитическая функция в окрестности существенно особой точки принимает значения, сколь угодно близкие к наперед заданному. Усилением С. т. является теорема Пикара.

Иногда С. т. неправильно называют теоремой Вейерштрасса. Эта теорема открыта русским ученым Ю. В. Сохоцким и одновременно итальянским математиком Ф. Казорати.

Лит.: [56].

**СОЧЕТАНИЕ** — одно из понятий *комбинаторики*. С. из  $n$  элементов по  $k$  называется всякое подмножество, состоящее из  $k$  элементов множества из  $n$  элементов. Два С. считаются различными, если некоторый элемент, входя в одно из них, не входит в другое. Число различных С. из  $n$  элементов (некоторого  $n$ -элементного множества) по  $k$  (элементов) обозначается символом  $C_n^k$  и выражается формулой

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ или } C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k},$$

где  $A_n^k$  — число *размещений* из  $n$  элементов по  $k$ ,  $P_k$  — число перестановок из  $k$  элементов. Числа  $C_n^k$  являются *биномиальными коэффициентами*.

**П р и м е р.** Сколько существует в выпуклом  $n$ -угольнике точек пересечения диагоналей, считая, что никакие три из них не пересекаются в одной точке?

**Р е ш е н и е.** Каждая искомая точка вполне определяется двумя диагоналями. Всякие две (пересекающиеся) диагонали вполне определяются четырьмя вершинами  $n$ -угольника — теми, которые они соединяют. Обратно, всякие четыре вершины  $n$ -угольника определяют одну из искоемых точек. Поэтому ответом на задачу будет число С. из  $n$  (вершин) по 4, т. е.  $C_n^4 = n(n-1)(n-2) \cdot (n-3) / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ .

Лит.: [18].

**СОЧЕТАНИЕ С ПОВТОРЕНИЯМИ** — понятие комбинаторики. Пусть  $\Xi$  — теоретико-множественное объединение  $k$  одинаковых конечных множеств  $M$ , состоящих из  $n$  элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , т. е. в множестве  $\Xi$  каждый элемент  $a_i$  содержится  $k$  раз. С. с п. из  $n$  элементов множества  $M$  по  $k$  элементов называется сочетанием в обычном смысле (т. е. без повторений) из  $k + n - 1$  элементов множества  $\Xi$  по  $k$ . Два С. с п. считаются различными, если хотя бы для одного номера  $r$  ( $1 \leq r \leq n$ ) в одном из этих С. с п. элемента  $a_r$  имеется большее число раз, чем в другом. Число различных С. с п. из  $n$  элементов по  $k$  равно  $(n + k - 1)! / k! (n - 1)!$ . Это число равно  $C_{n+k-1}^k$ , т. е. числу сочетаний (без повторений) из  $n + k - 1$  элементов по  $k$ ).

**СОЧЕТАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН** — то же, что и закон ассоциативности.

**СПЕКТР ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА**  $A$  — совокупность комплексных чисел, каждое из которых таково, что оператор  $A - \lambda E$ , где  $E$  — оператор, переводящий каждый элемент пространства в себя, не имеет ограниченного обратного, определенного на всем рассматриваемом пространстве. С. л. о. принадлежат все его собственные значения, т. е. такие числа  $\lambda$ , при которых существует ненулевой элемент  $x$ , такой, что  $Ax = \lambda x$ . Однако С. л. о. не исчерпывается собственными значениями. Например, оператор умножения на  $t$  в пространстве функций, интегрируемых в квадрате на отрезке  $[0; 1]$ , не имеет собственных значений, однако его спектр есть отрезок  $[0; 1]$ .

Лит.: [53].

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ** — класс функций, часто встречающийся при интегрировании уравнений математической физики. Основные С. ф. определяются обычно как решения линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами. Важнейшие С. ф.: гипергеометрические, цилиндрические, сферические, шаровые и др. Часто к С. ф. относят трансцендентные как не выражающиеся через элементарные функции.

Лит.: [82].

**СПИНОР** — математическая величина, принимающая в данной системе координат значения, определенные с точностью до знака. При переходе от одной системы координат к другой эти значения изменяются по особому закону. В теории представлений групп рассматриваются представления в координатах пространства С. (спинорные представления). С. применяются во многих вопросах квантовой механики (см. *Спинорное исчисление*).

**СПИНОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ** — один из математических аппаратов квантовой механики. Физическая величина изучается обычно в некоторой системе координат и задается в ней набором чисел-компонент физической величины. При изменении системы координат эти компоненты преобразовываются по определенным законам. Физическими величинами с различными законами преобразования являются векторы, тензоры, псевдотензоры, спиноры и т. п. С. и. изучает спиноры. К понятию спиноров наука подошла в начале XX в. с двух различных сторон: при изучении физического явления спина электрона и при разработке математической теории представлений групп (французский ученый Э. Картан, 1913); подобно тензорному исчислению, в С. и. различаются ковариантные и контрвариантные спиноры, вводится операция свертывания спинора и т. д.

**СПИРАЛЬ** — плоская кривая, многократно обходящая некоторую фиксиро-

рованную точку  $O$ , приближаясь к ней с каждым обходом или удаляясь от нее. Если точку  $O$  выбрать за полюс полярной системы координат, то уравнение  $C$  в этой системе можно записать в виде  $P = f(\varphi)$ , и будет справедливо неравенство  $f(\varphi + 2\pi) > f(\varphi)$  или  $f(\varphi + 2\pi) < f(\varphi)$  для всякого  $\varphi$ . Наиболее известные  $C$ : *архимедова  $C$ .*, *логарифмическая  $C$ .*, *Корню  $C$ .* (клотоида), *параболическая  $C$ .*, *гиперболическая  $C$ .*,  $C$  интегрального синуса и интегрального косинуса, *кохлеоида*.

Свойства многих  $C$  находят применение при решении практических задач. Так, свойство логарифмической  $C$  — пересекать под одним и тем же углом все радиус-векторы используется при проектировании вращающихся ножей, фрез и т. д. для получения постоянного угла резания;  $C$  Корню (клотоида) используется при графическом решении некоторых задач дифракции; название некоторых  $C$  связано с тем, что их полярные уравнения напоминают уравнения соответствующих кривых в декартовой системе координат:  $\rho^2 = a\varphi$  — параболическая  $C$ ,

$\rho = \frac{Q}{\varphi}$  — гиперболическая  $C$ .

Иногда  $C$  называют также пространственные кривые, многократно обходящие вокруг некоторой оси; например, винтовая линия называется также  $C$ .

**СПРЯМЛЯЮЩАЯ ПЛОСКОСТЬ** — плоскость, проходящая через *касательную* и *бинормаль* в данной точке  $M$  гладкой пространственной кривой. Огибающая семейства  $C$  п. данной кривой  $l$  называется спрямляющей поверхностью этой кривой.

Лит.: [61, 71].

**СПРЯМЛЯЮЩАЯ ПОВЕРХНОСТЬ** пространственной гладкой кривой  $l$  — огибающая семейства спрямляющих плоскостей этой кривой. На  $C$  п. кривая  $l$  является геодезической (см. *Геодезическая линия*).  $C$  п. является развертывающейся поверхностью. При развертывании  $C$  п. на плоскость кривая  $l$  преобразуется в прямую, т. е. спрямляется, чем и объясняется термин  $C$  п.

Лит.: [61, 71].

**СРАВНЕНИЕ.** Целые числа  $a$  и  $b$ , дающие одинаковые остатки при делении на  $m$ , принято называть сравнимыми по модулю  $m$ , где  $m$  — любое целое число, большее единицы, и обозначать так:  $a \equiv b \pmod{m}$ . Например,  $2 \equiv 28 \pmod{13}$ .

Сравнимые числа  $a$  и  $b$  по модулю  $m$  называются иначе равноостаточными. Такие пары чисел в вопросах делимости обладают по отношению к числу  $m$  некоторыми общими свойствами. Если  $a$  и  $b$  при делении на  $m$  дают остаток  $r$ , то

$$a = km + r, b = lm + r.$$

Тогда  $a - b = (k - l)m$  делится на  $m$ , откуда

$$a = qm + b, b = a - qm.$$

Отношение сравнимости — некоторое свойство подобия двух чисел. Установление важнейших свойств этого бинарного отношения целых чисел и составляет содержание теории сравнений, разработанной К. Гауссом. Вообще говоря, два числа, сравнимые по модулю, не имеют друг с другом ничего общего по другому модулю  $m$ .

Основные теоремы теории сравнений показывают, что со  $C$ , за исключением некоторых случаев, можно оперировать как с обыкновенными равенствами. Очень важная теорема теории сравнений устанавливает, что из  $x \equiv y \pmod{m}$

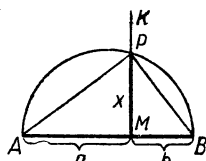


Рис. 98

следует:  $P(x) \equiv P(y) \pmod{m}$ , где  $P$  — произвольный многочлен с целыми коэффициентами.

Лит.: [13, 19].

**СРЕДНЕЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ** положительных чисел  $a$  и  $b$  — число  $x$ , равное арифметическому квадратному корню из произведения этих чисел, т. е.  $x = \sqrt{ab}$ .

Название С. п. оправдывается тем, что число  $x$  является средним членом пропорции  $a : x = x : b$ . С. п. двух отрезков, длины которых равны  $a$  и  $b$ , строится с помощью циркуля и линейки следующим образом (рис. 98). На отрезке  $a + b$  как на диаметре строится полуокружность. Из точки  $M$ , делящей отрезок  $a + b$  в отношении  $a : b$ , т. е. из конца  $M$  отрезка  $AM$ , длина которого равна  $a$ , проводим перпендикуляр  $MK$  до пересечения с полуокружностью в точке  $P$ . Тогда длина отрезка  $MP$  и будет искомым числом  $x$ , равным С. п. чисел  $a$  и  $b$ .

С. п. двух положительных чисел называется также *средним геометрическим* этих чисел. См. также: *Среднее чисел*, *Степенное среднее*.

**СРЕДНЕЕ ЧИСЕЛ**  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — числовая характеристика  $S$  этих чисел, удовлетворяющая условию:

$$\min \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \leq S \leq \max \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

**Примерами** **С. ч.** могут служить: *арифметическое С. ч.*, *геометрическое С. ч.*, *гармоническое С. ч.*, *квадратичное С. ч.*, *степенное С. ч.* и *взвешенное степенное С. ч.*

**СРЕДНЯЯ КРИВИЗНА** поверхности в данной ее точке  $M$  — полусумма главных кривизн этой поверхности в точке  $M$ .

Если С. к. в каждой точке поверхности равна нулю, то поверхность будет минимальной (см. *Минимальная поверхность*, *Главная кривизна*, *Кривизна*). Лит.: [61, 71].

**СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ:** 1°. **С. л. трапеции** — отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон. С. л. трапеции параллельна ее основаниям, и длина ее равна полусумме длин оснований. С. л. трапеции не разбивает ее на подобные трапеции. При аффинных преобразованиях С. л. трапеции переходит в С. л. преобразованной трапеции (трапеции-образа).

2°. **С. л. треугольника** — отрезок, соединяющий середины двух сторон этого треугольника. С. л. треугольника параллельна третьей стороне, а длина ее равна половине длины этой стороны. Во всяком треугольнике С. л. отсекает от него треугольник, подобный ему. Три С. л. треугольника разбивают треугольник на четыре конгруэнтных треугольника. При аффинных преобразованиях плоскости С. л. треугольника переходит в среднюю линию преобразованного треугольника (треугольника-образа).

См. также: *Фалеса теорема*.

**СТАНДАРТНЫЙ ВИД:** 1°. **С. в. положительного числа** — представление этого числа в виде произведения  $a \cdot 10^n$ , где  $1 \leq a \leq 10$  и  $n \in \mathbb{Z}$ . Если число записано в С. в.  $a \cdot 10^n$ , то показатель степени  $n$  называют порядком числа.

**Примеры:** 1) С. в. числа 10 600 есть число  $1,06 \cdot 10^4$ ;

2) С. в. числа 0,4 есть число  $4 \cdot 10^{-1}$ ;

3) С. в. числа  $1/70$  после округления будет таким:  $1,43 \cdot 10^{-2}$ .

С. в. п. ч. часто используется для записи довольно больших и малых чисел.

2°. С. в. многочлена — запись многочлена после приведения подобных членов (слагаемых).

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА** гипотез состоит в том, чтобы решить по данным эксперимента, согласуется ли некоторая гипотеза о распределении *случайной величины* с данными опыта. Например, пусть гипотеза, подлежащая проверке, состоит в том, что *математическое ожидание* случайной величины, получаемой в результате эксперимента, равно нулю. Тогда, в соответствии с законом больших чисел, среднее арифметическое результатов  $n$  экспериментов (где  $n$  достаточно велико) должно быть близко к нулю. Если это среднее оказывается далеким от нуля, то гипотеза отвергается. Точное правило, когда следует принимать и когда отвергать гипотезу, получается применением предельных теорем. Это правило заключается в следующем. Пусть известна *дисперсия* случайной величины, равная  $\sigma^2$  и в  $n$  независимых опытах были получены результаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $x_k$  есть результат  $k$ -го опыта). Если гипотеза справедлива, то случайная величина имеет

приблизительно нормальное распределение с параметрами  $\left(0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ . Условимся отвергать гипотезу, если  $|\bar{x}| > \beta$ . Правило принимать или отвергать гипотезу определяется, таким образом, числом  $\beta$ . Оно выбирается так, чтобы вероятность  $P\{|\bar{x}| > \beta\}$  отвергнуть гипотезу в том случае, если она верна, была мала, например, 0,01. Таким образом,  $\beta$  является корнем уравнения:

$$0,01 = P\{|\bar{x}| > \beta\} = P\left\{\frac{x\sqrt{n}}{\sigma} > \frac{\beta\sqrt{n}}{\sigma}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\beta\sqrt{n}}{\sigma}}^{\frac{\beta\sqrt{n}}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Приближенное решение этого уравнения легко находится с помощью таблиц нормального распределения.

Лит.: [17, 26].

**СТАЦИОНАРНЫЙ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПРОЦЕСС** — вероятностный процесс  $x(t)$ , у которого все вероятностные характеристики не зависят от времени; в частности, для С. в. п. распределения  $x(t)$  при различных  $t$  одинаковы и распределение пары  $x(t_1), x(t_2)$  зависит только от  $t_2 - t_1$ . С. в. п. играет большую роль в приложениях теории вероятностей к радиоэлектронике, теории связи, прогнозу погоды и др.

Большое значение для практики имеет так называемая задача экстраполяции (прогнозирования) С. в. п., т. е. задача возможно более точного определения значения процесса в момент  $T + \tau$  ( $\tau > 0$ ) по известным значениям его за время от  $t_0$  до  $T$ . Эта задача рассмотрена впервые А. Н. Колмогоровым, затем Н. Винером и рядом других математиков. Известно, например, что атмосферное давление может считаться С. в. п., если только время, в течение которого оно наблюдается, не слишком велико. Задача экстраполяции атмосферного давления есть в сущности задача о возможно более точном прогнозе его значения в момент  $T + \tau$  ( $\tau > 0$ ) по наблюдаемым значениям за время от  $t_0$  до  $T$ . Эта задача непосредственно связана с задачей прогноза погоды.

Лит.: [17, 26].



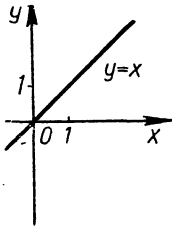


Рис. 99

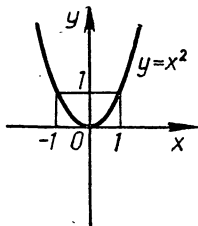


Рис. 100

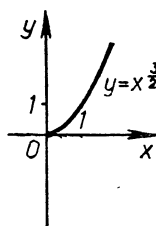


Рис. 101

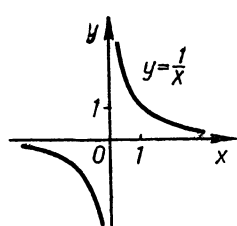


Рис. 102

**СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ** — функция, задаваемая формулой  $y = x^\alpha$ ,  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $\alpha$  — постоянное действительное число. С. ф. может быть определена также и для  $x < 0$ , если число  $\alpha$  рационально, и с нечетным знаменателем в несократимом представлении. При  $\alpha > 0$  С. ф. определена в нуле (при  $x = 0$ ), так как тогда считают, что  $0^\alpha = 0$ .

При  $x > 0$  С. ф. возрастающая, если  $\alpha > 0$ , и убывающая, если  $\alpha < 0$ . С. ф. имеет производные любого порядка во всей области своего определения, кроме точки  $x = 0$ ; при  $0 < \alpha < 1$  первая производная С. ф. обращается в бесконечность. Производная С. ф.  $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ , а интеграл от нее  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ , если  $\alpha \neq -1$ , и  $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$ .

Интегрирование ведется по промежутку, целиком принадлежащему области определения С. ф.

Графики С. ф. для различных значений показателя  $\alpha$  представлены на рисунках 99—102. Для  $\alpha = 1$  (рис. 99) графиком С. ф. является *прямая*. Для  $\alpha = 2$  (рис. 100) графиком С. ф. является *парабола*. Для  $\alpha = 3/2$  (рис. 101) С. ф. — *однозначна*, и график С. ф. есть *полукубическая парабола*. Для  $\alpha = -1$  (рис. 102) график С. ф. есть *гипербола* (здесь С. ф. имеет смысл и для  $x < 0$ ).

В комплексной области С. ф. становится, вообще говоря, многозначной (точнее, бесконечно значной). Для комплексного аргумента С. ф. определяется формулой

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha (\ln |z| + i \arg z + 2\pi i k)}, \quad (*)$$

где  $k$  пробегает целые действительные числа; при  $\alpha$  целом действительном С. ф. однозначна. Из множества значений С. ф. в комплексной области часто рассматривают только главное значение, определяемое равенством (\*) при  $k = 0$ .

См. также: *Логарифм*, *Логарифмическая функция*, *Функция комплексного переменного*, *Корень из числа*.

**СТЕПЕННОЕ СРЕДНЕЕ** положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — числовая характеристика  $S_\alpha$  этих чисел. С. с.  $S_\alpha = \left[ \left( \sum_{i=1}^n a_i^\alpha \right) / n \right]^{1/\alpha}$ , где  $\alpha$  — любое действительное число, отличное от нуля. Выражение для С. с. при  $\alpha = 0$  дает неопределенность, раскрыв которую, например, по *Лопиталю правилу* приходим к *геометрическому среднему*. Поэтому можно считать, что  $S_0$  является средним геометрическим и С. с. Значение  $S_\alpha$  определено для всех действительных чисел  $\alpha$ .

При  $\alpha = -1, 1$  и  $2$  из С. с. получаем соответственно *гармоническое среднее*  $S_{-1}$ , *арифметическое среднее*  $S_1$  и *квадратичное среднее*  $S_2$ .

Основное свойство С. с. состоит в том, что оно относительно  $\alpha$  является монотонной функцией, т. е. если  $\alpha \leq \beta$ , то  $S_\alpha \leq S_\beta$ . Поэтому среднее гармоническое, геометрическое, арифметическое и квадратичное:  $S_{-1}, S_0, S_1, S_2$  — удовлетворяют неравенствам  $S_{-1} \leq S_0 \leq S_1 \leq S_2$ . С. с. находят различные применения во многих разделах математики и математической статистики.

См. также: *Взвешенное степенное среднее*.

**СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ** — важный частный случай функциональных рядов — ряды вида  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ , где  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  — некоторые постоянные. С. р. рассматриваются как в поле действительных, так и в поле комплексных чисел. В своей области сходимости С. р. представляет *аналитическую функцию*.

С. р. сходится на множестве чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x| < r$  и при некоторых или всех  $x$ , удовлетворяющих равенству  $|x| = r$ , где  $r$  — *радиус сходимости*. В случае поля действительных чисел областью сходимости является интервал  $] -r; r[$ , симметричный относительно  $x = 0$ , а в комплексном случае областью сходимости является круг радиуса  $r$ . Граничные точки круга и интервала могут как принадлежать, так и не принадлежать области сходимости в зависимости от конкретных С. р. Интервал и круг сходимости могут вырождаться в точку ( $r = 0$ ), во всю прямую или плоскость комплексного переменного ( $r = \infty$ ).

Примеры: ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  сходится при  $x \in ]-1; 1[$ , ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n!} x^n$  сходится лишь при  $x = 0$ , ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$  сходится во всей плоскости.

Существует несколько признаков сходимости С. р., например признак Даламбера, Коши (см. *Коши критерий*) и др., а также способы определения радиусов сходимости. С. р. сходится равномерно (см. *Равномерная сходимость*) на всяком множестве  $|x| \leq r_1 < r$  (здесь  $r$  — радиус сходимости), где в силу теорем анализа возможно его почленное интегрирование.

Аналитические функции, являющиеся суммой С. р. в комплексной области, обладают некоторыми замечательными свойствами (см. *Аналитические функции*).

**СТЕПЕНЬ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ЧИСЛА** — наименьшая из степеней многочленов с целыми коэффициентами, для которых это число является корнем. Иначе можно сказать, что С. а. ч.  $\alpha$  — степень многочлена  $f(x)$ , *неприводимого* в поле рациональных чисел, такого, что  $f(\alpha) = 0$ . Если С. а. ч.  $\alpha$  равна  $n$ , то число  $\alpha$  называют также *иррациональностью  $n$ -й степени*.

**СТЕПЕНЬ МНОГОЧЛЕНА** от  $n$  неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  относительно неизвестного  $x_i$  — максимальная из степеней *членов многочлена* относительно  $x_i$  в *каноническом представлении* этого многочлена. Аналогично понятие С. м. по совокупности неизвестных определяется как максимальная из степеней членов в его каноническом представлении. С. м. по определению отсутствует лишь у *нуль-многочлена* (правда, некоторые авторы говорят в этом случае, что степень равна  $(-\infty)$ ).

**СТЕПЕНЬ ЧИСЛА** (или выражения) — произведение нескольких множителей, равных этому числу (выражению).  $n$ -я С. ч. (выражения)  $a$  кратко записы-

вается так:  $a^n$ , где  $a$  называется основанием степени, натуральное число  $n$  называется показателем степени. Показатель степени показывает, сколько раз число (выражение)  $a$  берется сомножителем (множителем).

При дальнейшем обобщении С. ч. (выражения) рассматривается степень с целым отрицательным показателем  $a^{-n}$  (отрицательная С. ч.), которая по определению принимается равной  $1 : a^n$  ( $a \neq 0$ ), т. е.  $a^{-n} = 1 : a^n$ . С. ч. с нулевым показателем (нулевая С. ч.) определяется равенством  $a^0 = 1$  при  $a \neq 0$ . С. ч. с дробным показателем (дробная С. ч.) определяется равенством  $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$  ( $a > 0$ ,  $p$  — целое,  $q$  — натуральное).

Основные свойства С. ч.:

- 1)  $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ ; 2)  $a^n : a^k = a^{n-k}$ ; 3)  $(a^n)^k = a^{nk}$ ; 4)  $(ab)^n = a^n b^n$ ;  
5)  $(a : b)^n = a^n : b^n = a^n \cdot b^{-n}$ .

Затем при дальнейшем обобщении понятия С. ч. рассматривается степень с иррациональным показателем (иррациональная С. ч.)  $a^a$  ( $a > 0$ ). Например,  $2^{\sqrt{2}}$  означает предел последовательности чисел

$$2^{1,4}, 2^{1,41}, 2^{1,414}, \dots, \text{ т. е. } 2^{\sqrt{2}} = \lim_{r_n \rightarrow \sqrt{2}} 2^{r_n},$$

где  $(r_n)$  — любая последовательность рациональных чисел, имеющая своим пределом число  $\sqrt{2}$ .

В теории функций комплексного переменного (комплексной переменной) рассматриваются выражения  $z^u$ , где  $z$  и  $u$  — комплексные числа. По определению  $z^u = e^{u \ln z}$ .

См. также: *Логарифм, Логарифмическая функция, Функция комплексного переменного, Степенная функция, Муавра формула.*

**СТЕРАДИАН** — единица измерения телесного угла. *Телесный угол* имеет величину в один С., если вершина его совпадает с центром сферы ( $O; R$ ), а граничные его образующие (лучи) вырезают на сфере фигуру, площадь которой равна  $R^2$  (кв. ед.). Вся сфера содержит  $4\pi$  стерадианов. Телесный угол не может иметь величину большую, чем  $4\pi$  стерадианов.

Греч. στερεος — пространственный; радиан — от лат. radius — луч, спица колеса.

См. также: *Радикан, Градус, Площадь, Телесный угол.*

**СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ** — проекция, которая ставит в соответствие каждой точке сферы  $Z_c$  точку плоскости  $Z_n$ . Это соответствие устанавливается следующим образом. Из точки  $C$  сферы  $Z_c$ , называемой центром С. п., каждая другая точка сферы проектируется на плоскость  $Z_n$ , перпендикулярную радиусу сферы, проведенному в точку  $C$ , и не проходящую через  $C$ . Чаще всего плоскость проходит через центр сферы или через конец диаметра, проведенного через точку  $C$ . С. п. устанавливает (после исключения из сферы самого центра проекции) взаимно однозначное соответствие между точками сферы и точками плоскости. Если плоскость  $Z_n$  — плоскость комплексная и сфера касается ее своим южным полюсом, а северный — центр проекции, то точки сферы будут изображениями комплексных чисел, а сфера именуется числовой. Чтобы распространить соответствие между точками сферы и плоскости на всю сферу, на плоскости вводят бесконечно удаленную точку (комплексное число  $z = \infty$ ) и считают ее со-

ответствующей северному полюсу сферы. Окружностям на сфере соответствуют окружности на плоскости, причем окружностям, проходящим через  $C$ , соответствуют на плоскости прямые.  $C$ . п. сохраняет углы, т. е. является конформным отображением.

$C$ . п. широко применяется в астрономии, картографии, в теории аналитических функций (см. *Римана сфера*).

Греч. *στερεος* — пространственный, *μετρον* — пишу.

**СТЕРЕОМЕТРИЯ** — часть геометрии, изучающая свойства фигур, расположенных в пространстве. Примерами таких пространственных фигур могут быть призма, пирамида, сфера и др. Систематический школьный курс  $C$ . строится по схеме, свойственной всякой дедуктивной науке.

1. Перечисляются основные понятия.

2. Формулируются аксиомы, в которых неявно выражены свойства основных понятий, формулируются определения на базе основных понятий.

3. На основе аксиом и определений доказываются теоремы. Основными понятиями школьного курса  $C$ . являются точка, прямая, плоскость и расстояние; кроме этих основных понятий, в стереометрии используются и общематематические понятия, такие, как «множество», «отображение» и др. Основными теоремами  $C$ . являются теоремы-признаки параллельности двух плоскостей, теорема о перпендикулярности прямой и плоскости и др.

Греч. *στερεος* — пространственный, *μετρον* — измеряю.

См. также: *Планиметрия, Геометрия, Аналитическая геометрия, Проективная геометрия*.

Лит.: [1, 63].

**СТИЛЬЕСА ИНТЕГРАЛ** определяется как

$$\lim_{l(T) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})].$$

Здесь  $T$  — разбиение отрезка интегрирования  $[a; b]$ ;  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  — точки деления этого отрезка;  $\xi_k$  — произвольная точка из  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $l(T) = \max |x_k - x_{k-1}|$  и  $n \rightarrow \infty$ ;  $\varphi$  — интегрируемая функция с ограниченной вариацией.  $C$ . и. обозначается

$$(S) \int_a^b f(x) d\varphi(x).$$

Если  $\varphi$  дифференцируема, то  $C$ . и. совпадает с *Римана интегралом*, если последний существует.  $C$ . и. широко применяется в теории вероятностей. Автором  $C$ . и. является голландский математик Т. Стильес (см. *Интеграл*).

**СТИРЛИНГА ФОРМУЛА** для приближенного выражения факториала:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

$C$ . ф. служит для оценки факториала  $n!$  при больших значениях  $n$ . Имеет место асимптотическое разложение:

$$\ln(n!) = \frac{1}{2} \ln 2\pi + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots +$$

$$+ (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k-1) 2k} \cdot \frac{1}{n^{2k-1}} + \dots,$$

где  $B_k$  — Бернулли числа.

**СТОКИ (источники)** — точки  $P$  векторного поля  $\vec{F}$ , в которых отличен от нуля предел

$$\lim_{\Sigma \rightarrow P} \frac{\int_{\Sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma}{v},$$

равный по значению дивергенции  $\text{div} \vec{F}$ , где  $\vec{F}$  — векторное поле,  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $\Sigma$ , стягиваемой в точку  $P$ ,  $v$  — объем пространства, ограниченного поверхностью  $\Sigma$ .

Лит.: [94].

**СТОКСА ФОРМУЛА** — формула, связывающая криволинейный интеграл по замкнутому контуру  $L$  с интегралом по поверхности  $S$ , ограниченной этим контуром. Поверхность и контур предполагаются гладкими и ориентированными и их ориентации согласованными (см. *Ориентация поверхности*). С. ф. записываются так:

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz +$$

$$+ \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx.$$

Здесь  $P, Q, R$  — непрерывные дифференцируемые функции  $x, y, z$ . С. ф. в векторной форме принимает вид:

$$\int_L (\vec{F} d\vec{l}) = \iint_S (\text{rot } \vec{F}, \vec{n}) d\sigma, \quad (*)$$

где  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ ,  $d\vec{l}$  — элемент длины контура,  $d\sigma$  — элемент площади поверхности,  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности. Равенство (\*) словесно выражается так: циркуляция векторного поля по замкнутому контуру  $L$  равна потоку вихря поля через поверхность  $S$ .

С. ф. обобщается на  $n$ -мерные многообразия. С. ф. получена английским ученым Дж. Г. Стоксом в 1854 г.

Лит.: [94].

**СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ** — то же, что и вероятностные и случайные процессы.

**СТРЕЛКА СЕГМЕНТА** — то же, что и Высота сегмента.

**СТРИКЦИОННАЯ ЛИНИЯ** (горловая линия) линейчатой поверхности — множество центров прямолинейных образующих  $l(t)$  поверхности ( $t$  — параметр семейства образующих). Центром образующей называется основание предельного положения общего перпендикуляра прямых  $l(t)$  и  $l(t + \Delta t)$ , когда  $\Delta t$  стремится к нулю.

Лит.: [61, 71].

**СТРЭФОИДА** — плоская кривая 3-го порядка, каноническое уравнение которой в прямоугольных декартовых координатах:

$$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x},$$

а в полярных:

$$\rho = -a \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}.$$

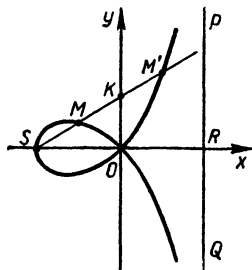


Рис. 103

где  $a$  — расстояние от  $O$  (полюса) до  $PQ$  — асимптоты С., т. е.  $OR = OS = a$ . С. можно получить следующим образом. Пусть дана прямая  $OY$  (рис. 103) и фиксированная вне ее точка  $S$ , через которую проходят все возможные лучи  $SK$ , пересекающие прямую  $OY$ . Если отложить на луче по обе стороны от точки  $K$  отрезки  $KM = KM' = OK$ , то множество точек  $M$  и  $M'$  при вращении луча  $SK$  вокруг точки  $S$  и есть С.

См. также: Углы.

Греч. στρόφος — кручение.

Лит.: [74].

**СТРУКТУРА** (решетка) — частично упорядоченное множество  $P$ , любые два элемента  $x, y$  которого имеют наибольшую нижнюю грань или «пересечение»  $x \cap y$  и наименьшую верхнюю грань или «объединение»  $x \cup y$ . Теория С. — один из важных разделов современной алгебры. С. особенно важны в приложениях.

Лит.: [48, 55].

**СТРУНЫ УРАВНЕНИЕ** — дифференциальное уравнение с частными производными, описывающее малые поперечные колебания однородной натянутой струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t),$$

где  $a$  — постоянная, характеризующая струну,  $x$  — координата вдоль струны,  $t$  — время,  $F(x, t)$  — некоторая известная функция, выражающая действие внешних сил,  $u(x, t)$  — искомая функция — отклонение струны в точке  $x$  в момент времени  $t$  от положения равновесия. С. у. описывает также много других физических процессов (колебания однородной среды и т. п.). С. у. — исторически первый пример гиперболического уравнения математической физики. Свойства решений С. у. во многом характерны для гиперболических уравнений. С. у. решается обычно при некоторых граничных и начальных условиях. Наиболее общий и мощный метод решения С. у. и некоторых гиперболических уравнений предложен Д. Бернулли (1755). Этим методом  $u(x, t)$  ищется в виде бесконечного ряда функций вида  $X(x)T(t)$  (метод разделения переменных или метод Фурье).

Лит.: [82].

**СТУПЕНЧАТАЯ ФУНКЦИЯ** на промежутке  $[a; b]$  из  $R$  — любая ограниченная числовая функция  $f$ , для которой  $[a; b]$  может быть разбит на конечное число интервалов  $]a_k; a_{k+1}[$ , где  $k = 0, 1, \dots, n-1$  ( $a_0 = a, a_n = b$ ), внутри которых  $f$  имеет постоянное значение.

С. ф. принимает лишь конечное число значений. С. ф. постоянна внутри каждого интервала  $]a_k; a_{k+1}[$ , а на концах этих интервалов она, вообще говоря, разрывна, т. е. число точек разрыва С. ф. конечно. Всякая С. ф. ограничена; верхняя ее грань — наибольшее значение из всех  $f(a_k)$ , а нижняя грань — наименьшее из всех этих значений.

Сумма С. ф. на промежутке  $[a; b]$  является также С. ф. С. ф. могут быть определены на любом множестве, а не только на замкнутом промежутке. *Непрерывные и монотонные* функции представляют собой равномерный предел С. ф. При рассмотрении вопросов интегрирования С. ф. играют существенную роль.

См. также: *Целая часть числа*.

Лит.: [64, 87].

**СТЮАРТА ТЕОРЕМА** — теорема, утверждающая: если  $A, B, C$  — вершины треугольника, а точка  $D$  лежит между  $B$  и  $C$ , то имеет место соотношение

$$|AD|^2 |BC| = |AB|^2 |CD| + |AC|^2 |BD| - |BC| \cdot |BD| \cdot |CD|.$$

С. т. названа по имени доказавшего ее английского математика М. Стюарта (1717—1785), опубликовавшего эту теорему в труде «Некоторые общие теоремы» (1746, Эдинбург).

Теорему сообщил Стюарту его учитель Р. Симсон, который опубликовал эту теорему лишь в 1749 г. С. т. применяется при вычислении длин медиан и биссектрис треугольника.

См. также: *Симсона прямая, Чевы теорема, Менелая теорема, Трансверсаль*.

Лит.: [1, 63].

**СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ** — функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющая условию:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \geq 0.$$

С. ф. обладает некоторыми свойствами гармонических функций. Она используется при доказательстве некоторых теорем о гармонических функциях и часто рассматривается в теории уравнений с частными производными.

**СУММА** — результат сложения значений однородных величин (чисел, векторов, тензоров, определителей, матриц, множеств и т. д.). Сумма обладает свойствами перестановочности:  $a + b = b + a$ , сочетательности:  $a + (b + c) = (a + b) + c$ , а также распределительности по отношению к умножению, если для рассматриваемых величин умножение определено:  $(a + b)c = ac + bc$ .

**СУММА МНОГОЧЛЕНОВ** допускает две основные концепции определения. Во-первых, так как многочлены являются частным случаем *функций*, то С. м. может быть определена как сумма функций. Во-вторых, С. м. можно определить следующим образом. Если многочлены  $P$  и  $Q$  имеют следующие *канонические представления*:

$$A_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} + B_1 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n} + \dots$$

и

$$A_2 x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \dots x_n^{\gamma_n} + B_2 x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_n^{\delta_n} + \dots,$$

то каноническое представление многочлена

$A_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} + B_1 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n} + \dots + A_2 x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \dots x_n^{\gamma_n} + B_2 x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_n^{\delta_n} + \dots$  называется С. м.  $P$  и  $Q$ .

Множество всех многочленов от  $n$  неизвестных над кольцом  $k$  относительно операции С. м. образует абелеву группу.

Если рассматриваются многочлены от одного неизвестного  $x$ , то С. м. можно определить как многочлен, в котором коэффициент при  $x^i$  равен сумме коэффициентов при  $x^i$  в многочленах-слагаемых; при этом предполагается, что если в некотором слагаемом многочлена член с  $x^i$  отсутствовал, то в качестве его коэффициента брался нуль.

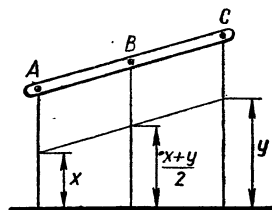


Рис. 104

**СУММА МНОЖЕСТВ** — то же, что объединение множеств.

**СУММАТОР** — простейшее устройство для определения суммы двух чисел. С. является основным арифметическим элементом математических машин. С. бывают дискретного и непрерывного действия. С., складывающий значения величин, задаваемые дискретной последовательностью чисел, называется С. дискретного действия. Он образует сумму путем сложения цифр из соответствующих разрядов слагаемых чисел и осуществляет необходимые межразрядные переносы. С. непрерывного действия оперирует не с цифрами, а со значениями переменных, которые могут меняться непрерывно. Простейшим С. является, например, устройство (рис. 104), состоящее из трех параллельных стержней, прикрепленных шарнирно в точках  $A, B, C$  к прямолинейному стержню  $l$ , так что  $|AB| = |BC|$ . Когда крайние стержни смещаются на расстояния  $x$  и  $y$ , то средний стержень смещается на расстояние  $(x + y) : 2$ .

См. также: *Номограмма, Абак, Непера палочки, Счетная линейка, Счетно-аналитические машины, Счетные машины, Счеты, Табулятор, Таблицы математические, Функциональное устройство, Цифровые машины, Электронные цифровые машины.*

**СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ** — способ построения обобщенной суммы ряда, не имеющего суммы в обычном смысле. По определению обобщенная сумма сохраняет многие свойства обыкновенной суммы. Так, например, требуется, чтобы из того, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  суммируется к  $A$  и ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  суммируется к  $B$ , следовало, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$  суммируется к  $\lambda A + \mu B$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  суммируется к  $A - a_0$ . Требуется также, чтобы суммирование сходящегося ряда приводило к его обычной сумме. При С. р. р.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (*)$$

поступают следующим образом: рассматривают ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n(t), \quad (**)$$

где  $\lambda_n(t)$  — функции такие, что ряд  $(**)$  сходится при  $t \neq t_0$  и  $\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda_n(t) = 1$ .

Обобщенной суммой ряда  $(*)$  называют  $\lim_{t \rightarrow t_0} \sigma(t)$ , где  $\sigma(t)$  — сумма ряда  $(**)$  (если этот предел существует). С. р. р. применяется во многих практических задачах теории электромагнитного поля и др.



**СУММИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ** — функция, для которой существует *Лебега интеграл*, взятый по данному множеству. Будучи интегрируемыми по Лебегу, эти функции должны быть одновременно *измеримыми* (по Лебегу). Функция с суммируемым квадратом — измеримая функция, квадрат которой есть С. ф.

**СУММИРУЮЩИЕ МАШИНЫ** — вычислительные машины для нахождения алгебраической суммы чисел, т. е. для выполнения операций сложения и вычитания. Они представляют собой соединение счетчика с дополнительными механизмами. Путем нажатия на определенные цифровые клавиши осуществляется последовательное внесение каждого слагаемого в счетчик машины. При этом происходят независимые добавления (с необходимыми межразрядными переносами) к цифрам, уже накопленным в одноразрядных решетках счетчика, в то время как в обычном счетчике суммирование осуществляется путем последовательного добавления единиц, составляющих вводимое число к числу, ранее накопленному. Показания счетчика либо печатаются, либо считываются оператором.

**СУПЕРПОЗИЦИЯ ФУНКЦИЙ** — составление из двух функций  $y = f(u)$  и  $u = \varphi(x)$  *сложной функции*  $y = f(\varphi(x))$ . Суперпозицию называют еще композицией. Суперпозиция происходит от латинских слов: super — над и positio — положение, т. е. наложение.

**СУЩЕСТВЕННО ОСОБАЯ ТОЧКА** аналитической функции  $f(z)$  — такая точка  $a$ , что  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  конечный или бесконечный не существует. Точка  $a$  тогда и только тогда является С. о. т. для функции  $f(z)$ , когда главная часть лорановского разложения функции  $f(z)$  в окрестности точки  $a$  содержит бесконечно много членов. Поведение функции в окрестности С. о. т. выясняет теорема, установленная русским математиком Ю. В. Сохоцким (1862): если  $a$  есть С. о. т. функции  $f(z)$ , то для любого комплексного числа  $A$  существует последовательность точек  $z_k \rightarrow a$  такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = A$ . Иными словами, в окрестности С. о. т. функция  $f(z)$  стремится по различным последовательностям к любому наперед заданному пределу (конечному или бесконечному). Например, для функций  $e^{\frac{1}{z}}$ ,  $\sin \frac{1}{z}$ ,

$\cos \frac{1}{z}$  начало координат является С. о. т. В самом деле, разложение  $e^{\frac{1}{z}}$  в ряд Лорана  $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$  содержит в окрестности  $z = 0$  бесконечно много членов с отрицательными степенями. Для  $A = \infty$  последовательностью  $z_k$  служит  $z_k = \frac{1}{k}$  ( $k \in N$ ), так как очевидно, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} e^x = \infty$ . Для  $A = 0$  можно принять  $z_k = -\frac{1}{k}$  ( $k \in N$ ), действительно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{-k} = 0$ . Для конечного  $A > 0$  берем

$$z_k = \frac{1}{\ln A + 2k\pi i}; \quad (k \in 0 \cup N),$$

тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\ln A + 2k\pi i} = A.$$

**СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАНТОР** — логический оператор  $\exists$ , обозначающий существование в предметной области объекта  $x$ , удовлетворяющего некоторому суждению  $P(x)$  (имеющему свойство  $P$ ). Запись  $\exists x P(x)$  читается: «существует  $x$  такой, что имеет место  $P(x)$ ».

Например, если  $P(x)$  означает: «сумма внутренних углов треугольника равна  $180^\circ$ », то суждение  $\exists x P(x)$  истинно в *евклидовой геометрии* и ложно в *Лобачевского геометрии*.

Отрицание С. к. приводит к общности квантору, а именно:

$$\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}.$$

Обозначение берет начало от перевернутой первой буквы латинского *existere* — существовать.

Лит.: [59].

**СФЕРА** — множество точек трехмерного евклидова пространства, находящихся на данном положительном расстоянии от данной точки. Данная точка называется центром  $C$ . Если  $O$  — данная точка, а  $M$  — любая точка  $C$ ., то отрезок  $OM$ , как и расстояние  $|OM|$ , называется радиусом сферы. Чаще всего радиус  $C$ . обозначается буквами  $r$ -или  $R$ .  $C$ . с центром  $O$  и радиусом  $R$  обозначается так:  $(O; R)$ ,  $S_R(O)$  или  $S^2$  (тогда в  $n$ -мерном пространстве  $R^n$  сфера обозначится  $S^{n-1}$ ) или каким-либо другим знаком. Отрезок (или его длина), соединяющий две точки  $C$ ., называется ее *хордой*. Хорда, проходящая через центр, называется диаметром  $C$ . Длина диаметра  $d = 2R$ . Сечение  $C$ . плоскостью, находящейся от центра  $C$ . на расстоянии, меньшем радиуса, есть окружность. Уравнение  $C$ . в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

где  $a, b, c$  — координаты центра, а  $R$  — радиус  $C$ .  $C$ . можно рассматривать как поверхность, полученную от вращения окружности вокруг своего диаметра. Площадь поверхности  $C$ . радиуса  $R$  находится как производная объема шара по радиусу:

$$S = \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)' = 4\pi R^2.$$

Касательная плоскость к  $C$ . перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.  $C$ . обычно изображают в ортогональной проекции, так как *абрис*  $C$ . в ортогональной проекции есть окружность, а в произвольной параллельной проекции абрис  $C$ . есть *эллипс*.

$C$ . есть двумерное *многообразие*.

См. также: *Шар, Сферическая геометрия, Сферическая тригонометрия*.

**СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ** — геометрическая дисциплина, изучающая свойства фигур, расположенных на сфере. С. г. аналогична в некоторой степени планиметрии, изучающей свойства фигур, расположенных на плоскости. Большие круги на сфере, являясь геодезическими линиями, играют роль прямых на плоскости: через две точки сферы, не совпадающие с концами ее диаметра, проходит только одна большая окружность С. г. аналогично тому, как на плоскости через две различные точки проходит только одна прямая. Однако в С. г. нельзя

провести параллельных «прямых», в то время как на плоскости Евклида и плоскости Лобачевского существуют *параллельные прямые*.

Основными фигурами С. г. являются *сферический двуугольник, сферический треугольник, сферические многоугольники*, т. е. многоугольники на сфере, сторонами которых являются дуги больших окружностей, длина которых меньше длины полуокружностей.

Сферу, как и плоскость, можно перемещать по самой себе. С. г. — одна из простейших геометрий, отличных от обычной геометрии Евклида.

В этой геометрии много удивительных фактов, не имеющих места в геометрии Евклида. С. г. находит применение в геодезии, астрономии (при изучении небесной сферы), в географии (при составлении карт), в мореплавании и в других науках и областях знаний.

Греч. *сфера* — мяч, сфера, шар.

Лит.: [63, 84, 95].

**СФЕРИЧЕСКАЯ ИНДИКАТРИСА** нормалей поверхности  $\vec{M} = \vec{M}(u, v)$  — часть поверхности сферы или вся сфера с параметризацией, индуцируемой уравнением поверхности. Более точно: в каждой точке поверхности  $\vec{M} = \vec{M}(u, v)$  рассматривается единичный вектор нормали  $\vec{n}$ ; таким образом, получается вектор-функция  $\vec{n} = \vec{n}(u, v)$  [ $\vec{n}$  — единичный нормальный вектор в точке  $(u, v)$ ]. Если начала векторов находятся в фиксированной точке, то концы этих векторов описывают часть сферы или всю сферу. Эта часть сферы или вся сфера вместе с параметризацией называется С. и. Отображение  $\vec{M}(u, v) \rightarrow \vec{n}(u, v)$  называется с ф е р и ч е с к и м о т о б р а ж е н и е м п о в е р х н о с т и. Это отображение часто и с большой пользой рассматривается в дифференциальной геометрии. Имеет место т е о р е м а: полная кривизна поверхности в точке равняется пределу отношения

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta S'}{\Delta S} = k,$$

где  $\Delta S$  — площадь некоторого кусочка поверхности, содержащего данную точку,  $\Delta S'$  — площадь сферического изображения этого кусочка поверхности. П р и м е р ы: С. и. плоскости есть точка; С. и. цилиндра есть большой круг сферы; С. и. конуса (без вершины) есть малый круг сферы. Рассматриваются также С. и. касательных к кривым и т. д.

Лит.: [61, 71].

**СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ** — тригонометрия сферического треугольника, т. е. раздел математики, изучающий зависимость между сторонами (их длинами) и углами (их величинами) сферического треугольника. В отличие от плоской (обычной) тригонометрии, в С. т. три угла (их величины) треугольника однозначно определяют его форму и размеры. В С. т. имеет место своя теорема *косинусов* и своя теорема *синусов*.

См. также: *Сферическая геометрия*.

**СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ** точки  $M$  — три числа  $r, \varphi, \theta$ , определяющие положение точки в пространстве. С. к. можно определить так. Пусть  $Ox, Oy, Oz$  — три взаимно перпендикулярные оси декартовых координат (рис. 105),

начало  $O$  которых совпадает с центром сферы  $O$  (радиуса  $r$ ). Тогда  $OM = r$ , есть расстояние точки  $M$  от точки  $O$ , угол  $\theta = \widehat{MOZ}$ , т. е. угол, составленный радиус-вектором  $OM$  с положительным направлением оси  $Oz$ , угол  $\varphi = \widehat{xON}$ , где  $N$  — проекция  $M$  на плоскость  $xOy$ .

С. к. связаны с декартовыми прямоугольными координатами следующими формулами:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Лит.: [87].

**СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.** С. ф. Лежандра  $P_n$  и  $Q_n$  служат решениями дифференциального уравнения Лежандра:  $[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0$  и могут быть представлены с помощью рядов:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k, \quad \text{где} \quad C_{k+2} = C_k \frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+1)(k+2)},$$

т. е.

$$y = A \left( 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots \right) + \\ + B \left( x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots \right)$$

с произвольными  $A$  и  $B$ .

Для любого целого числа  $n \geq 0$  один из рядов обрывается и соответствующая С. ф. превращается в полином Лежандра  $P_n(x)$ ; второй ряд при этом есть функция Лежандра второго рода.

Полиномы  $P_n(x)$  имеют производящую функцию

$$1 : \sqrt{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad \text{для} \quad |t| < 1$$

и

$$1 : \sqrt{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{-(n+1)} \quad \text{для} \quad |t| > 1.$$

**СФЕРИЧЕСКИЙ ДВУУГОЛЬНИК** — фигура, состоящая из двух диаметрально противоположных точек (концов диаметра) сферы и двух больших полуокружностей, соединяющих эти точки. Величины углов С. д. при его вершинах равны, а площадь С. д. пропорциональна величине угла при вершине.

См. также: *Сферическая геометрия*, *Сферический треугольник*.

**СФЕРИЧЕСКИЙ ИЗБЫТОК** — разность между суммой величин углов сферического треугольника и суммой величин углов треугольника евклидовой геометрии, т. е. разность  $(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) - \pi$ , где  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$  — величины углов сферического треугольника. С. и. также называют эксцессом. Разность же между суммой величин углов треугольника в плоскости Евклида и суммой величин углов треугольника в плоскости Лобачевского называется *дефектом* или

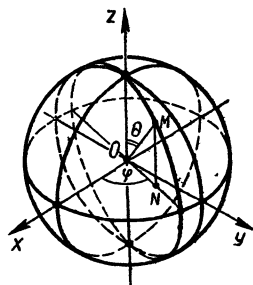


Рис. 105

недостатком треугольника, т.е. *дефект треугольника* есть разность  $\pi - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C})$ .

**СФЕРИЧЕСКИЙ ПОЯС** — часть сферической поверхности, полученная от вращения дуги окружности вокруг оси, лежащей с дугой в одной плоскости и не пересекающей ее. С. п. — это объединение части сферической поверхности, заключенной между пересекающимися сферой параллельными плоскостями, и двух окружностей, полученных при этом пересечении.

См. также: *Шаровой слой, Сфера*.

**СФЕРИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК** — три точки сферы, не лежащие на одной большой окружности, и три дуги больших окружностей, длины которых меньше длины большой полуокружности, соединяющей эти точки вместе с внутренними точками. Сумма величин углов С. т. больше  $\pi$  и меньше  $3\pi$ , т. е. имеет место неравенство  $\pi < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 3\pi$ .

Многие признаки конгруэнтности С. т. аналогичны признакам конгруэнтности треугольников евклидовой геометрии. Однако есть и иные; например, если три угла одного С. т. конгруэнтны трем углам другого (одной и той же сферы), то такие С. т. конгруэнтны.

См. также: *Сферическая геометрия, Сферический двугрульник, Косинусов теорема, Синусов теорема*.

**СХОДИМОСТИ ТОЧКА** функционального ряда (функциональной последовательности)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  — такая точка  $x_0$ , что числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ , составленный из значений функций  $u_n(x)$  в данной точке  $x_0$ , является сходящимся.

Лит.: [87].

**СХОДСТВЕННЫЕ СТОРОНЫ** — выходящий из употребления термин. Так раньше называли соответственные стороны двух треугольников (многоугольников), один из которых является образом другого в некотором геометрическом преобразовании.

**СХОДЯЩИЙСЯ РЯД** — ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , имеющий конечную сумму. Сходимость комплексного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , где  $c_n = a_n + b_n i$ , к сумме  $A + Bi$  равносильна сходимости двух действительных рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  соответственно к  $A$  и  $B$ .

**СЧЕТ** — математическое понятие, имеющее два значения. Во-первых, С. понимается как операция, имеющая целью установить, сколько элементов содержит данное конечное множество; во-вторых, С. есть совокупность первых четырех операций, производимых над рациональными числами. С. называют также *вычислением*.

См. также: *Нумерация, Система счисления, Позиционная система, Арабские цифры, Римские цифры, Счеты*.

Лит.: [15, 31, 95].

**СЧЕТНАЯ ЛИНЕЙКА** — счетное устройство в виде материальной линейки, предназначенной для выполнения различных вычислений. К С. л. относится и *логарифмическая линейка*, на которой можно умножать, возводить в степень, извлекать корень, выполнять тригонометрические вычисления. Существуют также линейки со шкалами для решения специальных задач. Например, на 17 шкалах

навигационной С. л., применяемой в авиации, можно производить расчеты пути, времени и скорости полета по показанию барометра, перевод мер длины и скоростей и другие вычисления.

См. также: *Счетно-решающие устройства.*

**СЧЕТНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МАШИНЫ** (или счетно-перфорационные машины) — ряд машин, работающих с перфорационными картами, на которых путем пробивки отверстий нанесены коды различных чисел и команд или слов. К С.-а. м. относятся прежде всего перфораторы, наносящие на перфокарты коды чисел, команд, слов. Сортировка группирует карты по каким-либо признакам. Репродуктор применяется для размножения перфокарт с перфокарт-шаблонов. Расшифровочная машина расшифровывает коды чисел (команд, слов), нанесенные на перфокарты. На базе С.-а. м. строятся входные и выходные устройства современных быстродействующих электронных счетных машин.

**СЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО** — множество (эквивалентное) равномощное множеству натуральных чисел. Мощность С. м. является наименьшей мощностью бесконечных множеств и обозначается  $\aleph_0$  (читается: алеф-нуль). Объединение С. м. являются С. м.

**Примерами** С. м. могут служить множества всех четных чисел, всех рациональных чисел  $Q$ , всех многочленов от  $n$  переменных с целыми коэффициентами, всех алгебраических чисел. Любое бесконечное подмножество С. м. — счетно. Всякое бесконечное множество содержит своим подмножеством С. м. Бесконечное множество, не являющееся С. м., называется *несчетным множеством*.

См. также: *Алеф, Континуум.*

**СЧЕТНО-РЕШАЮЩИЕ УСТРОЙСТВА** — различные устройства, входящие в математические машины и предназначенные для выполнения определенной математической операции. Они бывают непрерывного и дискретного действия в зависимости от того, пробегают ли переменные, содержащиеся в решаемой задаче, всю область своего изменения непрерывно или же принимают лишь дискретные значения. С.-р. у. бывают суммирующие, множащие, интегрирующие и дифференцирующие, а также функциональные, служащие для автоматической реализации заданной функциональной зависимости.

**СЧЕТНЫЕ МАШИНЫ** — математические машины, предназначенные для механизации математических операций над отдельными числами. Наиболее распространены суммирующие машины, выполняющие сложение и вычитание, и полуавтоматические и автоматические арифмометры, производящие все четыре арифметических действия. Такие машины называются малыми С. м. и состоят из установочного (для установки задаваемых чисел), переносного и счетного устройств, которые весьма сходны: у всех у них числа, над которыми должны выполняться операции, обычно задаются машине путем нажатия клавиш специального устройства; таким же способом управляют машиной. Результат получается на особой шкале.

**СЧЕТЧИК** — цифровой математический прибор для выполнения простейшей арифметической операции — счета, т. е. для последовательного увеличения числа, уже накопленного в счетчике, на единицу. В зависимости от используемой системы счисления С. бывают десятичными, двоичными, восьмеричными и

вообще  $p$ -ичными, состоящими из одноразрядных  $p$ -ичных регистров, соединенных межразрядными переносами; накопление в данном разряде  $p$  единиц вызывает увеличение показаний ближайшего старшего разряда на единицу и переход данного регистра в нулевую позицию. Технически С. бывают различные: механические, релейные, электрические, электронные. С. в том или ином виде является необходимым элементом всякой математической вычислительной машины, в том числе и электронных быстродействующих вычислительных машин.

См. также *Электронные вычислительные машины*.

**СЧЕТЫ** — простейшее устройство для выполнения арифметических вычислений (сложения и вычитания), широко применяемое в практике счетной работы и как наглядное пособие в школе при изучении указанных операций над натуральными числами, а также над десятичными дробями, имеющие степень точности до одной сотой. Чаще всего С. используют для подсчета денежных сумм.

В России в XVI в. появились счеты, явившиеся прообразом современных С. Свой современный вид С. приобрели в начале XVIII в.

Существуют китайские С. (суан-пан) со счетом единиц до 5.

См. также: *Абак, Абацисты*.

Лит.: [57].

**СЧИСЛЕНИЕ** — то же, что и *система счисления*, или *нумерация*.

См. также: *Позиционная система, Непозиционная система счисления, Систематические дроби, Арабские цифры, Римские цифры*.

**СЮРЪЕКЦИЯ** — отображение одного множества на другое. Другими словами, отображение  $f: X \rightarrow Y$  множества  $X$  в множество  $Y$  называется С., если любой элемент  $y$  из  $Y$  имеет прообраз. С. иначе называется *сюръективным отображением*, а также *наложением*. Термин С. чаще употребляется в научной литературе и, к сожалению, почти не употребляется в учебной литературе для средней школы.

См. также: *Инъекция (вложение), Биекция*.



**ТАБЛИЦЫ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ** — таблицы, содержащие числовые значения какой-либо функции, вычисленные для соответствующих значений ее аргумента. Простейшим примером Т. м. является всем известная с детства таблица умножения. Широкое распространение во всех наших средних школах получили четырехзначные Т. м. В. М. Брадиса. Т. м. являются важным вспомогательным средством при разных расчетах в математике, физике, химии, астрономии, технике и других областях знаний и практической деятельности человека. В составлении таблиц принимали участие знаменитые математики, такие, как Л. Эйлер, А. Лежандр, К. Гаусс. Большие работы по составлению Т. м. ведутся у нас в СССР и в настоящее время. Выпускаются различные Т. м. исследовательскими институтами АН СССР.

**ТАБУЛИРОВАНИЕ** — составление и конструирование различных математических таблиц (см. *Таблицы математические*).

**ТАБУЛЯТОР** — вид счетно-аналитических машин, автоматически выполняющих нанесенные на перфокарты команды. Т. вычисляют алгебраическую сумму чисел, коды которых также наносятся на перфокарты, и печатают результаты вычислений.

**ТАНГЕНС** — одна из тригонометрических функций, обозначаемая  $\operatorname{tg}$ , значения которой определяются формулой  $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ . Область определения Т., т. е.  $D(\operatorname{tg})$ , состоит из всех действительных чисел, кроме чисел вида  $\pi/2 + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Множество значений Т., т. е.  $E(\operatorname{tg})$ , есть вся числовая прямая  $\mathbb{R}$ . Пусть в ориентированной плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат (рис. 106) и дана окружность единичного радиуса с центром в начале координат, а также угол  $\alpha$  с вершиной в начале координат. Пусть  $M_0$  — точка с координатами  $(1; 0)$ . Тогда поворот  $R_0^\alpha$  отобразит точку  $M_0$  в точку  $M_\alpha = R_0^\alpha(M_0)$ . Координаты точки  $M_\alpha$  — числа  $(x_\alpha, y_\alpha)$  являются соответственно косинусом угла  $\alpha$  и синусом угла  $\alpha$ , а отношение ординаты к абсциссе есть Т. угла  $\alpha$ , т. е.  $y_\alpha : x_\alpha = \operatorname{tg} \alpha = y_p$ , где

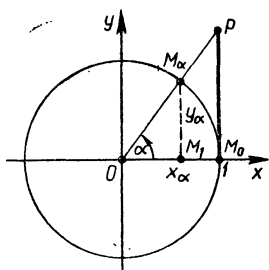


Рис. 106



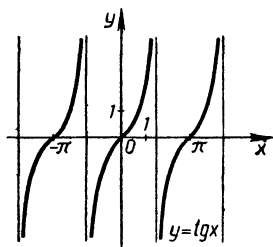


Рис. 107

$y_P$  — ордината точки  $P$ , лежащей на касательной  $M_0P$  к единичной окружности в точке  $M_0$ . Т. является функцией величины угла. Т. есть функция периодическая (с наименьшим положительным периодом, равным  $\pi$ ), неограниченная и *нечетная*. График Т. в прямоугольной декартовой системе координат имеет центр симметрии — начало координат и состоит из множества конгруэнтных ветвей. График функции Т. называется *тангенсоидой*.

С возрастанием угла  $\alpha$  от 0 до  $\pi/2$  (радианов) Т. возрастает от 0 до  $\infty$ . Котангенс и Т. для общей области определения связаны соотношением

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$ . Функция, обратная Т. на промежутке  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , называется *арктангенсом*.

Производная функции  $y = \operatorname{tg} x$  вычисляется по формуле  $\operatorname{tg}' x = 1 : \cos^2 x$ . Функция Т. непрерывна в своей области определения, как и котангенс. Интеграл от Т. находится по формуле  $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$ . Функция Т. разлагается в степенной ряд:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (|x| < \frac{\pi}{2}).$$

Если рассматривать угол  $\alpha$  как острый угол прямоугольного треугольника, то Т. можно определить как отношение катета, противолежащего углу  $\alpha$ , к катету, прилежащему к этому углу (из треугольника  $OM_\alpha M_1$ ), т. е.  $\operatorname{tg} \alpha = y_\alpha : x_\alpha$ ; для треугольника  $ABC$  значение  $\operatorname{tg} \hat{A} = a : b$  ( $\hat{C} = 90^\circ$ ).

Длина касательной, проведенной из точки  $P$ , принадлежащей лучу  $OM_\alpha$ , к единичной окружности, равна модулю Т. угла  $\alpha$ , т. е.  $|\operatorname{tg} \alpha| = |PM_0|$ . Отсюда происходит слово «тангенс».

Лат. tangens — касательная (tango — касаюсь).

См. также: *Гиперболические функции, Тригонометрические уравнения.*

**ТАНГЕНСОВ ТЕОРЕМЫ** — теоремы (формулы) сложения, относящиеся к тангенсу суммы и разности двух углов или их числовых мер, т. е. формулы

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

См. также: *Регiomонтана формула, Тригонометрия.*

**ТАНГЕНСОИДА** — график тригонометрической функции  $y = \operatorname{tg} x$  в прямоугольной декартовой системе координат (рис. 107).

**ТЕЙЛОРА РЯД** функции  $f(x)$  в точке  $a$  есть ряд:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots \quad (1)$$

Здесь  $f(x)$  определена и обладает производной любого порядка в точке  $a$ .

Формально выписанный Т. р. (1) может быть как сходящимся, так и расходящимся, причем, даже будучи сходящимся, он может сходиться к функции, отличной от  $f(x)$ . Например, для функции  $f(x) = x^{2/3}$  нельзя выписать Т. р. в точке  $a = 0$ , так как в этой точке функция не имеет производных.

Т. р.  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$  для функции  $e^x$  сходится везде к функции  $e^x$ . Т. р. для

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

является сходящимся, но не сходится к  $f(x)$ , а тождественно обращается в нуль. Можно также привести примеры функций, Т. р. которых расходится или сходится к другой функции. Если  $S_n(x)$  — сумма первых  $n+1$  членов Т. р. (1), то разность  $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$  называется остаточным членом Т. р. Формула  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f^{(n)}(a)/n!) (x-a)^n$  справедлива, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ .

При  $a = 0$  Т. р. обращается в *Маклорена ряд*. Наиболее распространенными разложениями в Т. р. являются разложения функций:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (5)$$

Ряд (2) сходится: при  $x \in ]-1, 1[$ , если  $m < -1$ ; при  $x \in ]-1, 1]$ , если  $-1 < m < 0$ ; при  $x \in [-1, 1]$ , если  $m > 0$ . Ряды (3) и (4) сходятся для любых  $x$ . Ряд (5) сходится при  $x \in ]-1, 1]$ .

Справедливы следующие теоремы:

1. Если функция  $f(x)$  разлагается в *степенной ряд*, то это обязательно ее Т. р.

2. Если существует такое  $C > 0$ , что  $|f^{(n)}(x)| < C$  ( $x \in [-r, r]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ), то функция  $f(x)$  разлагается в степенной ряд на отрезке  $[-r, r]$ .

**ТЕЙЛОРА ФОРМУЛА** — формула, позволяющая приближенно находить значения гладкой функции для заданного значения аргумента. Если  $a$  — любое действительное число, то Т. ф. с остаточным членом выглядит так:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

где  $f \in C^{n+1}$ , т. е.  $f$  обладает на  $[a, x]$  непрерывной  $(n+1)$ -й производной.

Причем неизвестная точка  $\bar{x}$  лежит между  $a$  и  $x$ . Ошибка  $R_n(x)$  оценивается формулой (остаточный член):

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Для многочлена Т. ф. выглядит так:  $f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} [f^{(k)}(a)/k!] (x-a)^k$ , где  $n$  — степень многочлена, т. е. для многочлена  $R_n(x) = 0$ .

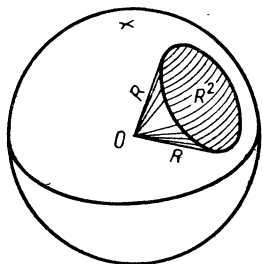


Рис. 108

**ТЕЛЕСНЫЙ УГОЛ** — часть пространства, ограниченная одной из двух полостей конической поверхности (конуса), *направляющая* которой гомеоморфна окружности. Частным случаем Т. у. являются *трехгранные* и *многогранные углы*. За меру измерения Т. у. принимается площадь фигуры, которую вырезает коническая поверхность (конус) на сфере радиуса  $R$  и с центром в вершине конической поверхности. Единицей измерения Т. у. принимается *стерадиан*, т. е. Т. у., вырезающий на сфере фигуру, площадь которой равна  $R^2$  (рис. 108).

**ТЕЛО:** 1°. Т. алгебраическое есть ассоциативное кольцо, у которого все элементы, отличные от нуля, относительно операции умножения образуют группу. Всякое поле есть Т., однако операция умножения в Т., вообще говоря, некоммутативна (см. *Коммутативность*). П р и м е р о м Т., не являющегося полем, служит кольцо *кватернионов*.

2°. Т. геометрическое — в широком смысле слова это любое подмножество. Иногда описательно определяют как фигуру, ограниченную со всех сторон частями поверхностей. П р и м е р ы геометрических Т.: *куб, круглые тела* и др.

**ТЕЛО ВРАЩЕНИЯ** — геометрическое тело, полученное от вращения некоторой плоской фигуры вокруг фиксированной прямой, называемой осью вращения. Иногда рассматривают вращение вокруг отрезка или луча, а не вокруг прямой.

П р и м е р ы. 1. Тело, полученное от вращения эллипса вокруг одной из его осей, называется *эллипсоидом* вращения.

2. Тело, полученное от вращения прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет, называется *прямым круговым конусом*.

Иногда Т. в. или некоторые из них называют *круглыми телами*.

**ТЕНЗОР.** При исследовании некоторых математических или физических объектов средствами алгебры и анализа часто приходится прибегать к помощи системы координат, например, в задачах, связанных с кривыми 2-го, 3-го и т. п. порядка, с угловой скоростью вращения, с напряжением упругих пластин и т. д. Сама изучаемая величина имеет определенный (физический, геометрический и т. д.) смысл, является единым целым и, конечно, обладает свойствами, не зависящими от случайного выбора системы координат. Однако в каждой системе координат величина характеризуется набором чисел — координат: коэффициенты уравнения кривой 2-го порядка, коэффициенты полилинейной формы, линейного преобразования и т. д. Большой класс величин объединяется в понятие по связи между координатами величины в одной системе координат и в другой системе. Точнее, если в каждой системе координат  $n$ -мерного пространства задан набор чисел:

$$T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}; i_k = 1, 2, \dots, n; j_l = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, p; l = 1, 2, \dots, q, (*)$$

причем при замене данной системы координат другой системой с помощью матрицы  $a_j^i$  числа  $(*)$  изменяются по формуле

$$Z_{i_1 i_2 \dots i_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{\substack{k_1 k_2 \dots k_p \\ i_1 i_2 \dots i_q}} a_{k_1}^{i_1} a_{k_2}^{i_2} \dots a_{k_p}^{i_p} b_{j_1}^{k_1} b_{j_2}^{k_2} \dots b_{j_q}^{k_p} Z_{i_1 i_2 \dots i_q}^{k_1 k_2 \dots k_p},$$

где  $b_j^i$  — матрица, обратная к  $a_j^i$ , то говорят, что задан Т.,  $p$  раз контравариантный и  $q$  раз ковариантный.

**Примеры** Т. см. в терминах: *Полилинейная форма, Квадратичная форма, Линейное преобразование, Аффинор, Поливектор.*

Лит.: [72].

**ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ** — раздел математики, изучающий тензоры и тензорные поля средствами линейной алгебры и математического анализа. Над тензорами в  $n$ -мерном линейном пространстве производятся алгебраические действия сложения, свертывания (см. *Свертывание тензора*), симметризации, альтернирования и т. д. Каждая такая операция имеет смысл геометрический или физический, смотря по роду задачи, поставленной практикой. Однако указанные действия и свойства тензоров можно и полезно изучать даже без связи с этими задачами. Четыре упомянутых выше действия над тензорами и их свойства составляют основное содержание важной составной части Т. и. — тензорной алгебры.

Более глубоким отделом Т. и. является тензорный анализ — дисциплина, в основу которой положено понятие предела, дифференцируемости. Объектом исследования тензорного анализа являются тензорные поля. Понятие дифференцируемости тензорных полей является более сложным, чем, например, дифференцируемость обычной функции многих переменных — скалярного поля. Инвариантное (неизменное при различных выборах криволинейных координат) дифференцирование тензорных полей может быть введено при помощи конструкции так называемого параллельного переноса. См. *Абсолютное дифференцирование*. Частным случаем Т. и., составляющим, пожалуй, самостоятельную дисциплину, является векторное исчисление. Т. и. — мощное орудие исследования теории относительности и дифференциальной геометрии.

Первоначальные идеи Т. и. появляются в XIX в. в связи с задачами дифференциальной геометрии у К. Гаусса и Б. Римана. Оформление Т. и. как науки произошло в трудах итальянских математиков Г. Риччи-Курбастро и Т. Леви-Чивита. Особенно широко и интенсивно развивается Т. и. в связи с идеями теории относительности, механики сплошной сферы, теории дислокаций и т. д.

Лит.: [72].

**ТЕОРЕМА** — предложение (утверждение), истинность которого может быть доказана в данной аксиоматической теории. Существуют Т., истинность которых не могут доказать в течение длительного периода времени, например *Ферма теорему* о решении некоторого уравнения с тремя переменными в натуральных числах.

Греч. теорема — представление, зрелище (так как в древности часто Т. доказывались публично, на площадях, и они носили характер спора, диспута).

См. также: *Критерий, Лемма, Аксиома.*

Лит.: [40, 57].

**ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ** в плоской тригонометрии — формулы для синуса, косинуса и тангенса суммы или разности двух углов.

См. также: *Тангенсов теорема, Синусов теорема, Косинусов теорема, Сферическая тригонометрия, Сферическая геометрия.*

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ** — математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений. Математическое понятие вероятности есть отражение объективного закона статистической устойчивости частоты, сущность которого состоит в следующем.

Пусть имеется некоторый комплекс условий  $K$ , с которым связано событие  $A$ , причем событие  $A$  при выполнении условий комплекса  $K$  может как произойти, так и не произойти. Например,  $K$  может обозначать бросание игральной кости, а событие  $A$  — выпадение единицы. Пусть комплекс  $K$  воспроизводится некоторое число  $n$  раз, из которых  $m$  раз наступает событие  $A$  (в результате  $n$  бросаний кости единица выпала  $m$  раз). Тогда частотой событий  $A$  называется отношение  $\frac{m}{n}$ .

Явление статистической устойчивости частот состоит в том, что при больших  $n$  частота события  $A$  почти не зависит от  $n$  и близка к некоторому числу. Это число и называется вероятностью события  $A$ . В приведенном примере бросания игральной кости частота выпадения единицы при большом числе бросаний близка к  $1/6$ , следовательно, вероятность выпадения единицы равна  $1/6$ .

Основываясь на том, что при большом числе наблюдений частота близка к вероятности, Р. Мизес предлагал определить вероятность как предел частоты. Однако проверка того, что частота стремится к вероятности как к пределу, требует производства бесконечного числа опытов и потому неосуществима. Поэтому принять определение Р. Мизеса — значит вообще отказаться от каких бы то ни было применений теории вероятностей.

Возникновение Т. в. связано с вопросами азартных игр.

Важный вклад в Т. в. внес Я. Бернулли: он дал доказательство закона больших чисел в простейшем случае независимых испытаний. В первой половине XIX в. теория вероятностей получает применение к анализу ошибок наблюдений. Лаплас и Пуассон доказали первые предельные теоремы. Развитие Т. в. во второй половине XIX в. связано в основном с именами русских ученых П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и А. М. Ляпунова. В это время были доказаны закон больших чисел и центральная предельная теорема, а также разработана теория цепей Маркова. В XX в. теория вероятностей получает весьма серьезные применения в самых различных областях науки и техники. Возникает теория случайных процессов. Важнейшее значение для этой теории имеют работы А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина. В частности, А. Н. Колмогоровым изучены в рамках введенной им аксиоматики так называемые марковские процессы.

Предельные теоремы обобщены на суммы зависимых случайных величин С. Н. Бернштейном и рядом других математиков.

В конце XIX и начале XX в. создается математическая статистика. См. также *Статистическая проверка гипотез*. В 40-х годах нашего века в Т. в. возникают *теория информации и теория игр*.

Таким образом, современная Т. в. является весьма разветвленной наукой. В числе приложений можно указать приложения к теоретической физике (статистическая физика, квантовая теория), радиоэлектронике, теории случайных помех в линиях связи, теории автоматического регулирования. В биологии и медици-

не Т. в. применялась главным образом для обработки результатов экспериментов. Однако в последние годы, по-видимому, наметилась возможность применения Т. в. в вопросах, связанных с нервной деятельностью, а также в вопросах наследственности. Т. в. может быть применена при решении многих военных задач, а также задач, связанных с анализом экономики.

Лит.: [17, 26, 83].

**ТЕОРИЯ ГРУПП** — раздел алгебры, изучающий свойства групп. Т. г. возникла первоначально в качестве вспомогательной дисциплины теории алгебраических уравнений (см. *Галуа теория*). В дальнейшем она развивалась в тесной связи с задачами разрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах. На этом пути С. Ли дал основы теории непрерывных групп. Весьма глубокие и разнообразные применения этой теории в алгебре, геометрии, дифференциальных уравнениях, топологии дали основания для оформления Т. г. в самостоятельную дисциплину. Т. г. рассматривает различные классы групп, как-то: абелевы, нильпотентные, разрешимые, полупростые, с конечным числом образующих, свободные и т. п. Изучаются конструкции построения по заданным группам новых групп (см. по этому поводу термины: *Фактор-группа*, *Отображение группы*, *Гомоморфизм*). Т. г. к настоящему времени достигла крупных успехов: классифицированы абелевы группы с конечным числом образующих, полупростые группы Ли.

Лит.: [37, 48].

**ТЕОРИЯ ИГР** — теория выбора наиболее выгодного поведения при столкновении противоречивых интересов. Математическое понятие игры возникло из рассмотрения различных игр (шахмат, шашек, карточных игр и т. д.). Однако область его применения значительно шире и охватывает весьма различные ситуации, в которых сталкиваются противоречивые интересы (конкурентная борьба, военные действия и т. д.).

Типичная постановка задачи в Т. и. такова. Имеются два противника (первый и второй игроки), каждый из которых выбирает независимо от другого определенный способ действий — стратегию.

Например, выбрать стратегию белых в шахматах — значит указать первый ход и для каждого возможного первого, второго, третьего и т. д. хода черных указать ответ белых; выбрать стратегию черных — значит указать ответ черных на каждый возможный ход белых. Игра имеет некоторое множество исходов, зависящих только от выбранных стратегий (и, возможно, еще от случайного эксперимента, результат которого не зависит от игроков). Если игра получила исход  $a$ , второй игрок уплачивает первому  $f(a)$  рублей (если  $f(a)$  отрицательно, то второй получает от первого  $|f(a)|$  рублей). Математическое ожидание  $M(x, y)$  выигрыша первого игрока зависит только от стратегий  $x$  и  $y$ , выбранных соответственно первым и вторым игроками. Т. и. рассматривает следующие задачи: а) какую стратегию  $x_0$  должен выбрать первый игрок, чтобы гарантировать себе возможно больший выигрыш независимо от действий второго, т. е. чтобы:

$$\min_y M(x_0, y) = \max_x \{ \min_y M(x, y) \};$$

б) какую стратегию  $y_0$  должен выбрать второй игрок, чтобы независимо от действий первого проиграть как можно меньше, т. е. чтобы:

$$\max_x M(x, y_0) = \min_y \{ \max_x M(x, y) \}.$$

Эти задачи получили принципиальное решение в случае, когда число стратегий каждого игрока конечно. При этом оказалось, что обычно каждому игроку бывает выгодно выбирать не какую-нибудь фиксированную стратегию, а при каждом повторении игры выбирать одну из возможных стратегий  $x_1, x_2, \dots, x_n$  для первого игрока и  $y_1, y_2, \dots, y_m$  для второго с некоторыми вероятностями, соответственно  $p_1, p_2, \dots, p_n$  и  $q_1, q_2, \dots, q_m$ . Наборы  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  и  $(q_1, q_2, \dots, q_m)$  называются смешанными стратегиями игроков. Нахождение этих наборов, а также математического ожидания выигрыша первого игрока называется решением игры.

Рассмотрим в качестве п р и м е р а следующую игру. Первый игрок прячет либо монету в 10 к., либо монету в 20 к.; второй игрок должен угадать, какая монета спрятана. Если он угадывает, то получает стоимость спрятанной монеты, если не угадывает, то платит первому игроку 15 к.

Применением м е т о д о в Т. и. в этом случае можно получить, что наилучшая стратегия первого игрока — прятать 10 к., с вероятностью  $7/12$ , а 20 к. — с вероятностью  $5/12$ . При этом математическое ожидание его выигрыша равно  $5/12$  к. при условии, что второй игрок применяет свою наилучшую стратегию (наилучшая стратегия второго игрока — называть 20 к. с вероятностью  $7/12$  и 10 к. с вероятностью  $5/12$ ). Если второй игрок будет применять другую стратегию, то он не сможет уменьшить свой проигрыш ( $5/12$  к. в среднем при каждом повторении игры). Необходимо иметь в виду, что Т. и. применима в том случае, когда игра повторяется достаточно много раз, тогда выигрыш каждого игрока будет в силу закона больших чисел мало отличаться от его математического ожидания.

Лит.: [28].

**ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ** — один из разделов кибернетики, рассматривающий общие закономерности передачи сообщений, — часто называется также теорией передачи информации.

Основным понятием Т. и. является информация. Если имеются случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ , принимающие значения соответственно  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  и  $y_j, j = 1, 2, \dots, m$ , то информацией  $I(\xi, \eta)$  о случайной величине  $\xi$ , содержащейся в  $\eta$ , называется сумма:

$$I(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(\xi = x_i, \eta = y_j) \log \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\xi = x_i) P(\eta = y_j)},$$

где  $P(\xi = x_i, \eta = y_j)$  — вероятность того, что случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  примут соответственно значения  $x_i, y_j$ .

Энтропией  $H(\xi)$  случайной величины  $\xi$  называется  $I(\xi, \xi)$ . Т. и. рассматривает передачу сообщений по каналам связи с помехами. Канал связи имеет вход, на который подаются символы  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , и выход, с которого снимаются символы  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n$ . Н а п р и м е р, в телеграфном аппарате Морзе символами на входе являются точки, тире и пустые промежутки (паузы). Они же являются символами на выходе. При этом в результате помех точка на входе может перейти в тире или паузу на выходе. Поэтому в Т. и. рассматриваются вероятности  $P(\tilde{y}_j/y_i)$  перехода символа  $y_i$  на входе в символ  $\tilde{y}_j$  на выходе. Только эти вероятности являются существенными для Т. и.; природа канала (состоит ли он из электриче-

ских, или механических, или радиоприборов, или даже из живых существ) не играет никакой роли.

Именно эта общность Т. и. делает возможным ее применение в самых различных областях, например в вопросе о путях передачи информации о наследственных признаках при развитии зародыша.

В зависимости от вероятностей, с какими подаются на вход символы  $u_i$ , информация о случайной величине на входе, содержащаяся в случайной величине на выходе, может принимать различные значения. Пропускной способностью канала называется наибольшее значение этой информации. Для того чтобы передавать по каналу сообщение (например, телеграмму по телеграфу Морзе), надо сначала перевести сообщение в символы на входе (буквы в точки и тире). Эта операция называется *кодированием*. Затем символы на входе передаются по каналу. Получившиеся символы на выходе надо декодировать (перевести точки и тире обратно в буквы). Возникает вопрос: для каких сообщений можно выбрать кодирование и декодирование так, чтобы вероятность ошибки, возникающей из-за помех, была как угодно мала? Теорема К. Шеннона, являющаяся центральным результатом Т. и., утверждает, что при широких предположениях, для того чтобы такой выбор был возможен, необходимо и достаточно, чтобы энтропия сообщения была меньше пропускной способности канала.

Теорема К. Шеннона была доказана самим К. Шенноном при сравнительно узких предположениях. Эти предположения были затем расширены А. Райнстейном (США) и советскими математиками А. Я. Хинчиным и А. Н. Колмогоровым. Идеи теории информации применены А. Н. Колмогоровым в некоторых других областях математики.

Лит.: [17].

**ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ** — раздел геометрии, изучающий с локальной точки зрения поверхности в трехмерном евклидовом пространстве средствами дифференциального исчисления.

Основы Т. п. заложены в трудах Л. Эйлера. Классические результаты этой науки получены французским математиком Г. Монжем, затем К. Ф. Гауссом. Значительный вклад в Т. п. внесли русские математики П. Л. Чебышев, Петерсон (уравнения Петерсона — Кодацин). В Советском Союзе вопросами Т. п. успешно занимались В. Ф. Каган, Я. С. Дубнов, С. П. Фиников, Г. Ф. Лаптев, В. В. Вагнер, П. К. Рашевский, А. П. Норден.

Лит.: [61, 71].

**ТЕРМ** — некоторые последовательности предметных (индивидуальных) переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , предметных (индивидуальных) констант  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , а также вспомогательные знаки, соответствующие скобкам, запятым и т. д. разговорного языка, включая функциональные знаки от  $n$  аргументов ( $f_1^1, f_2^2, \dots, f_k^k, \dots$ ), где аргументы  $t_1, t_2, \dots, t_n$  — имена некоторых предметов данного множества нерасчленяемых объектов.

**П р и м е р ы:** 1,  $x$ ,  $(x + y)$  — примеры Т. формализованного языка арифметики.

Англ. term — выражение, член.

См. также: *Предикат, Квантор, Алфавит*.

Лит.: [59].



**ТЕРНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ** на множестве  $M$  — подмножество множества  $M^3 = M \times M \times M$ . Другими словами, Т. о. на  $M$  — это правило (или закон), по которому из  $M$  выделяются упорядоченные тройки элементов. Т. о. иначе называется трехместным отношением.

П р и м е р ы. 1. Известное отношение для трех точек прямой «лежать между» есть Т. о. 2. Отношение на множестве чисел  $a + b = c$  является также Т. о., связывающим числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

См. также: *Бинарное отношение, Арность, Декартово произведение множества, Между лежать.*

**ТЕТА-ФУНКЦИИ** — особый класс целых функций. Основные четыре Т.-ф. определяются рядами:

$$\Theta_1(z) = 2q^{1/4} \sin z - 2q^{3/4} \sin 3z + 2q^{5/4} \sin 5z - \dots,$$

$$\Theta_2(z) = 2q^{1/4} \cos z + 2q^{3/4} \cos 3z + 2q^{5/4} \cos 5z + \dots,$$

$$\Theta_3(z) = 1 + 2q \cos 2z + 2q^4 \cos 4z + 2q^9 \cos 6z + \dots,$$

$$\Theta_4(z) = 1 - 2q \cos 2z + 2q^4 \cos 4z - 2q^9 \cos 6z + \dots,$$

где  $q < 1$ . Т.-ф. обладают следующим свойством: отношение двух Т.-ф. есть эллиптическая функция.

**ТЕТРАЭДР** — четырехгранник или треугольная пирамида. Правильный Т. — правильный четырехгранник, т. е. один из пяти типов правильных многогранников (Платоновы тела), имеющий 4 треугольные грани, 4 вершины и 6 ребер. Правильный тетраэдр в отличие от других *правильных многогранников* не имеет центра симметрии. Однако правильный Т. имеет 6 плоскостей симметрии, каждая из которых проходит через его ребро и середину другого ребра, скрещивающегося с первым. Правильный Т. легко получить из куба, если из любой его вершины  $A$  провести три диагонали граней куба  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  и соединить точки  $B$ ,  $C$ ,  $D$  между собой отрезками.

Правильный Т., как и вообще любой Т., согласно теореме П о л ь к е — Ш в а р ц а можно изображать в виде произвольного выпуклого четырехугольника с его диагоналями. Т. двойствен (дуален) сам себе.

В любой Т. можно вписать сферу и вокруг любого Т. можно описать сферу. Т. — *симплекс* трехмерного пространства.

Греч. тетра — четыре, едра — грань, основание.

См. также: *Двойственности принцип, Эйлера теорема о многогранниках.*

**ТЕТРАЭДРИЧЕСКИЕ ЧИСЛА** — натуральные числа вида  $n(n+1)(n+2):6$ , т. е. числа 1, 4, 10, 20, ... . Т. ч. являются частным случаем *фигурных чисел* и составляют *арифметический ряд* 3-го порядка. Название Т. ч. происходит от того, что ими выражается число шаров, выложенных в пространстве в форме правильных тетраэдров (рис. 109, а, б, в).

**ТОЖДЕСТВЕННАЯ ПОДСТАНОВКА** (или единичная подстановка) — подстановка множества  $x \rightarrow x$ , отображающая каждый элемент в себя. Т. п. играет роль единицы в симметрической группе и имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

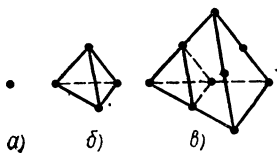


Рис. 109

**ТОЖДЕСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ:** 1°. Т. п. в алгебре — замена одного выражения с переменными (алгебраического, аналитического выражения) другим, тождественно равным ему, т. е. принимающим те же значения при всех допустимых значениях букв, входящих в это выражение (при всех значениях переменных, имеющих смысл). Т. п. выражения  $f(a, b, c, \dots, x, y)$  есть переход от этого выражения к выражению  $\varphi(a, b, c, \dots, x, y)$ , по внешнему виду, вообще говоря, отличному от первого, но такому, что равенство  $f = \varphi$  есть *тождество*. Т. п. выражения  $f$  можно выполнять множеством способов. Т. п. играют большую роль в алгебре при решении уравнений, неравенств и их систем, при доказательстве теорем и тождеств.

Примерами Т. п. служат: сокращение дробей, раскрытие скобок (закон дистрибутивности), вынесение множителя за скобки или за знак корня, приведение подобных членов, приведение выражения к логарифмическому виду, формулы (теоремы) сложения в тригонометрии, формула Ньютона для натурального показателя бинома, разложение *квадратного трехчлена* на линейные множители и т. д.

2°. Т. п. в геометрии — преобразование (отображение)  $n$ -мерного пространства в себя, при котором все точки этого пространства остаются неподвижными (двойными), т. е. каждая точка пространства отображается на себя. Т. п. часто обозначается буквой  $E$ , оно играет роль единицы при композиции преобразований.

Примеры.

1. Параллельный перенос плоскости (пространства) на нулевой вектор  $\vec{0}$  есть Т. п.

2. Гомотетия с данным центром  $O$  и коэффициентом  $k = 1$  есть Т. п. плоскости (пространства). Т. п. важно при рассмотрении *группы* преобразований.

**ТОЖДЕСТВО** — равенство двух выражений с одной или несколькими переменными; левая и правая части которого принимают равные значения на некотором множестве. Понятие Т. используется часто при решении уравнений и неравенств.

Примеры.

1) Тригонометрические тождества:  $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  и др.;

2)  $\lg(x \cdot y) = \lg x + \lg y$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  и др.

См. также: *Ньютона бином*, *Тождественное преобразование*, *Полный квадрат*.

**ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ** — числовые или другие характеристики топологического пространства, которые не изменяются при *гомеоморфизме*. Изучение Т. и. есть предмет топологии. Примерами Т. и. служат: *эйлерова характеристика*, *связность*, *числа Бетти*, *группы Бетти* и др.

Лит.: [4, 68].

**ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО** — понятие, обобщающее в определенном смысле понятие *метрического пространства*. Т. п. есть множество произвольных элементов, называемых точками Т. п., характеризующихся отношением «бесконечной близости». Более точно: в множестве точек Т. п. выделяется класс множеств, называемых открытыми множествами или окрестностями, — аналог открытых множеств евклидова пространства. Окрестностью точки называется

любое открытое множество, содержащее данную точку вместе с некоторым открытым множеством, ее содержащим.

Требуется, чтобы объединение любой совокупности и пересечение конечного числа открытых множеств было открытым множеством. Этим определено отношение «бесконечной близости»: точка  $x$  предельная для множества  $M$ , если любая окрестность точки  $x$  содержит точку множества  $M$ . Тем самым на топологическом пространстве возможно рассмотрение непрерывных функций и непрерывных отображений.

Т. п. может быть определено и другими способами, например с помощью операции замыкания. Однако такое определение понятия Т. п. слишком общее и поэтому имеет мало применений вне собственно топологии. Дальнейшим сужением понятия Т. п. являются хаусдорфовы пространства, нормальные пространства и т. п.

**Пример.** Любое метрическое пространство есть Т. п. В самом деле, назовем множество  $M$  открытым, если оно вместе с каждой точкой  $x$  содержит все точки  $y$  пространства, удовлетворяющие условию  $\rho(x, y) < \delta$ , где  $\delta > 0$  произвольно. Эти множества удовлетворяют указанным выше требованиям.

Лит.: [4, 68].

**ТОПОЛОГИЯ** — наука, изучающая свойства *топологических пространств*, не изменяющиеся при гомеоморфизме (см. также *Топологические инварианты*). Так как поверхности в геометрии и траектории в теории дифференциальных уравнений можно рассматривать как топологические пространства, то топология включает в себя исследования весьма общих свойств этих объектов.

Одним из первых занимался исследованиями топологических проблем французский ученый А. Пуанкаре. Он впервые понял, что изучать общие свойства сложных поверхностей, задавая уравнения различных их частей, неудобно. Ему принадлежат идея триангуляции поверхности, идея комплекса и т. п.

В настоящее время Т. бурно развивается, особенно это касается алгебраической Т. Советская топологическая школа продолжает занимать одно из ведущих мест в мире. Весьма важные результаты в Т. получены советскими математиками П. С. Александровым, П. С. Урысоном, Л. С. Понтрягиным, М. М. Постниковым, С. П. Новиковым.

Лит.: [4, 68].

**ТОР** — поверхность (фигура), полученная от вращения окружности  $\omega$  вокруг оси  $l$ , лежащей в плоскости этой окружности и не пересекающей ее. По внешнему виду Т. напоминает баранку, бублик, спасательный круг или камеру автомобильной шины (рис. 110). Иногда тело, ограниченное Т., также называют Т.

Поверхность и объем Т. согласно известным теоремам Гюльдена вычисляются по формулам:

$$S = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr,$$

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 Rr^2,$$

где  $r$  — радиус данной окружности  $\omega$  (круга), а  $R$  — расстояние от центра окружности  $\omega$  до оси вращения  $l$ . Т. есть двумерное *многообразие*. Поверхность Т. есть декартово произведение двух окружностей.

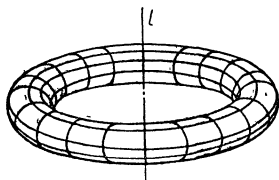


Рис. 110

Иногда Т. рассматривают как фигуру вращения окружности  $\omega$  вокруг оси  $l$ , лежащей в плоскости окружности. В этом случае получают различные формы Т.: тор-кольцо (рис. 110), тор-яблоко (если ось касается окружности  $\omega$  или пересекает ее), тор-сфера (если ось проходит через центр окружности  $\omega$ ). Сечения Т. плоскостью — различные линии по форме и по названию.

Лат. *torus* — узел, вздутие, выпуклость.

**ТОРРИЧЕЛЛИ ТОЧКА** — точка  $M$  треугольника  $ABC$ , обладающая тем свойством, что сумма расстояний от этой точки до вершин треугольника  $|AM| + |BM| + |CM|$  минимальна.

Лит.: [1, 41, 81].

**ТОЧКА** — элемент множества, наделенного некоторой структурой. Это одно из основных понятий геометрии, косвенное определение которому дается в аксиомах при дедуктивном (аксиоматическом) построении всякой геометрии. Природа Т. может быть самой различной. Так, под Т.  $n$ -мерного евклидова пространства понимают упорядоченное множество  $n$  чисел. Под Т. проективной плоскости понимают упорядоченную тройку пропорциональных чисел  $(x_1: x_2: x_3)$ , из которых хотя бы одно не равно нулю (арифметическая модель Т.). Под Т. проективной плоскости в трехмерном евклидовом пространстве можно понимать евклидову прямую в связке прямых и плоскостей (евклидова модель проективной плоскости). В математическом анализе и дифференциальной геометрии рассматривают также Т.: особая Т., возврата Т., изолированная Т., перегиба Т., прекращения Т., самопересечения Т., угловая Т.

В теории функций и теории множеств рассматриваются Т., характеризующие свойства изучаемых функций и множеств: предельная Т., граничная Т., плотности Т., особые Т. решений дифференциальных уравнений и другие Т.

Иногда в физике, теории вероятностей рассматривают м а т е р и а л ь н у ю Т., размерами которой можно пренебречь. В геометрии также рассматривают специальные Т. относительно некоторых фигур или преобразований.

См. также: *Торричелли точка, Фейербаха теорема, Центр симметрии, Центр гомотетии, Центроид треугольника, Окружность, Центр кривизны.*

**ТОЧКА ЭКСТРЕМУМА** функции — точка, в которой функция имеет экстремум, т. е. максимум или минимум. Иногда под точкой экстремума понимают такую, в которой обращаются в 0 первые производные. Однако такую точку правильнее называть критической.

**ТРАЕКТОРИЯ** — непрерывная кривая, которую описывает при движении материальная точка. Движение может определяться системой дифференциальных уравнений. В этом случае говорят о траектории системы дифференциальных уравнений.

Лат. *trajecio* — перемещаю.

**ТРАКТРИСА** — плоская кривая, уравнение которой в прямоугольных декартовых координатах имеет вид:

$$x = \pm \left[ a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \right].$$

Т. является трансцендентной кривой. Т. есть *эвольвента* (развертка) *цепной ли-*

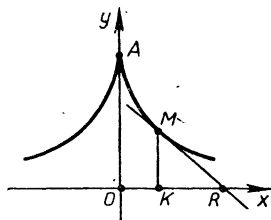


Рис. 111

**ниш.** Характеристическое свойство Т. состоит в том, что длина ее касательной (от точки  $M$  до оси  $Ox$ ) есть постоянная величина  $a$  (рис. 111),  $|MR| = a$ . Ось  $Ox$  — асимптота Т., или база Т. Точка  $A(0, a)$  — точка возврата Т. (см. *Возврата точка*) — называется ее вершиной. Т. расположена симметрично относительно оси  $Oy$ . Поверхность вращения Т. вокруг ее асимптоты (базы) есть *псевдосфера*.

Если мыслить точку  $M$  как материальную, к которой натянута нерастяжимая нить  $MR$  длиной  $a$ , то при движении конца нити по некоторой прямой

$Ox$  точка  $M$  опишет траекторию, называемую Т. Отсюда происходит и ее название.

Лат. tracto — тащу, влеку; *трактриса* — линия влечения.

**ТРАНЗИТИВНОСТЬ** — одно из важных свойств, которым может обладать *бинарное отношение*. Говорят, что бинарное отношение  $R$  удовлетворяет условию Т., если из того, что  $aRb$  и  $bRc$  следует, что  $aRc$ .

**Примеры.** Отношения  $\{=, <, \leq\}$  на множестве действительных чисел транзитивны. Отношение  $\neq$  на том же множестве не удовлетворяет условию Т.

Лат. transitive — переходность.

**ТРАНСВЕРСАЛЬ** — любая прямая, пересекающая стороны треугольника под углом  $\alpha \neq 0$  в евклидовой геометрии.

Франц. transversal — поперечный, от лат. transversus — поперечный. Имеется ряд теорем о Т.

См. также: *Менелая теорема*, *Чевы теорема*, *Средняя линия треугольника*, *Симсона прямая*.

**ТРАНСПОЗИЦИЯ** — *подстановка*, перемещающая лишь два символа, а остальные символы оставляющая на месте. Т. является циклической подстановкой, и длина циклической подстановки, являющейся Т., равна двум. Т. является нечетной перестановкой. Применение одной Т. к перестановке меняет ее четность на противоположную.

Лат. transponere — перемещать.

**ТРАНСПОНИРОВАННАЯ МАТРИЦА** к матрице  $A$  — матрица  $A'$ , получающаяся из матрицы  $A$  перемены ролями ее строк и столбцов. Например,

если  $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ , то Т. м. к ней будет  $A' = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$ . Если матрица  $A$

квадратная, то ее определитель равен определителю Т. м. к ней. Это одно из основных свойств определителей. Матрица, транспонированная к произведению матриц, равна произведению матриц, транспонированных к сомножителям, притом взятых в обратном порядке, т. е.:

$$(A_1 A_2 \dots A_n)' = A_n' A_{n-1}' \dots A_2' A_1'.$$

**ТРАНСФИНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ** — математический принцип, утверждающий следующее: если из того, что какое-либо предложение справедливо для всех *трансфинитных чисел*  $\alpha$ , предшествующих данному трансфинитному числу  $\beta$ , следует, что это предложение справедливо также для  $\beta$ , то предложение справед-

ливо для любого трансфинитного числа. Т. и. является обобщением метода полной математической индукции и применяется в различных разделах математики.

Лит.: [46].

**ТРАНСФИНИТНЫЕ ЧИСЛА** — обобщение понятия порядковых чисел для бесконечных множеств. Если конечные множества допускают лишь один тип упорядочения, который характеризуется порядковым числом, то бесконечное множество, пусть даже самое простейшее, можно сделать *вполне упорядоченным* многими различными способами. Например, множество из двух элементов  $\{a, b\}$  допускает единственный порядок  $a, b$  или, что безразлично,  $b, a$ . Самое простое бесконечное множество целых положительных чисел допускает, например, такие упорядочения: 1)  $1, 2, 3, \dots$ ; 2)  $2, 3, 4, \dots, 1$ . Эти два упорядочения различны хотя бы потому, что первое из них не имеет последнего элемента, а второе имеет. Для каждого возможного порядкового типа вводится его обозначение — Т. ч. Над Т. ч. производится действие сложения, весьма сильно отличающееся от сложения обычных чисел. В приведенном выше примере порядковый тип 1) обозначается  $\omega$ , порядковый тип 2) есть  $\omega + 1$ . Можно показать, что  $1 + \omega = \omega$ , хотя  $\omega + 1 \neq \omega = 1 + \omega$ .

По *Цермело теореме* каждое множество, т. е. множество любой мощности, может быть сделано вполне упорядоченным и, как правило, не единственным способом. Итак, одинаковые *кардинальные числа* (мощность множеств, обобщение понятия количественного числа) могут быть заданы различными Т. ч., хотя в случае конечных множеств эти понятия совпадают.

*Трансфинитная индукция* ведется по Т. ч.

Лит.: [46].

**ТРАНСЦЕНДЕНТНОЕ УРАВНЕНИЕ** — уравнение, содержащее *трансцендентные функции* от переменной (от неизвестного). Общего приема решения Т. у., кроме приближенного, не существует. Обычно рассматривают только простейшие из Т. у.: показательные, логарифмические и тригонометрические или обратные тригонометрические.

**П р и м е р ы** Т. у.:  $\sin x = \lg x$ ,  $2^x - \lg x = \arccos x$ ,  $3^x = \sin x + \cos x$ .

См. также: *Графическое решение, График функции, Показательные уравнения.*

**ТРАНСЦЕНДЕНТНОЕ ЧИСЛО** — (комплексное) число, которое не может быть корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами. Иначе, Т. ч. есть число, не являющееся *алгебраическим*. Примерами Т. ч. являются числа  $e$  и  $\pi$ . Доказательства этих фактов довольно сложны.

Однако то, что Т. ч. существует, можно показать простым рассуждением. Множество всех многочленов с целыми коэффициентами счетно (см. *Счетное множество*), у каждого многочлена конечное число корней. Следовательно, множество алгебраических чисел счетно, а так как множество чисел имеет мощность *континуума*, то существуют не алгебраические, т. е. Т. ч. Мощность Т. ч. — континуум.

Всякое Т. ч. иррационально, однако существуют иррациональные числа, не являющиеся Т. ч. Например, число  $\sqrt[3]{3} + 1$  есть корень уравнения  $(x - 1)^3 = 3$ , следовательно, оно является иррациональным, но не Т. ч.

Существование Т. ч. впервые установил Ж. Лиувиль (1844). Советский ма-

тематик А. О. Гельфонд доказал, что если  $\alpha$  — алгебраическое число  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$  и  $\beta$  — иррациональное число, то  $\alpha^\beta$  — Т. ч.

Лит.: [22].

**ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ КРИВЫЕ** — линии на плоскости или, в общем случае, в произвольном векторном пространстве, не являющиеся алгебраическим многообразием. П р и м е р ы Т. к. — графики функций:  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \lg x$ ,  $y = 2^x$ .

**ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ** — аналитические функции, которые не являются алгебраическими. Такими функциями, например, являются логарифмические, показательные и тригонометрические функции. Если Т. ф. рассматривать как функции комплексного переменного, то у Т. ф. обязательно будет особенность, отличная от полюсов и точек разветвления конечного порядка. Например,  $e^z$ ,  $\sin z$  имеют существенно особую точку  $z = \infty$ .

Специальные Т. ф. изучаются в соответствующих курсах (например, теория бесселевых, эллиптических функций и др.; см. *Аналитические функции*).

**ТРАПЕЦИЙ ФОРМУЛА** — формула приближенного вычисления определенных интегралов:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \frac{f_0 + f_n}{2} + f_1 + \dots + f_{n-1} \right) = S,$$

где  $f_k = f(a + kh)$ ,  $h = (b - a) / n$  и  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Общая площадь *криволинейной трапеции* заменяется Т. ф. — суммой площадей прямолинейных трапеций, у которых ординаты  $f_k$  и  $f_{k+1}$  являются длинами боковых сторон. Погрешность при применении Т. ф. равна:

$$|S - I| = \left| \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi) \right|, \text{ где } \xi \in [a; b].$$

См. также: *Приближенное интегрирование и квадратурные формулы*.

**ТРАПЕЦИЯ**: 1°. Т. — выпуклый четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные стороны Т. называются ее *основаниями*, а непараллельные — *боковыми сторонами*. Т., у которой боковые стороны конгруэнтны, называется *равнобедренной* или *равнобокой*. Т., у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основанию, называется *прямоугольной*.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон Т., называется *средней линией* Т. Средняя линия трапеции параллельна основаниям, а ее длина равна полусумме длин оснований.

Расстояние между параллельными прямыми, содержащими основания Т., называется *высотой* трапеции. Средняя линия Т. (рис. 112)  $KL$  не делит Т. на подобные Т. В равнобедренной Т. углы при основании конгруэнтны. Верно и

обратное предложение: если углы при основании Т. конгруэнтны, то Т. является равнобедренной. У равнобедренной Т. диагонали конгруэнтны и сумма величин противолежащих углов равна  $180^\circ$ . Равнобедренная Т. имеет ось симметрии; вокруг равнобедренной Т. можно описать окружность, верно и обратное: если вокруг Т. можно описать окружность, то она равнобедренная.

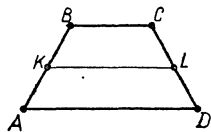


Рис. 112





$ABC$ , называется его внутренним углом. Внутренним углом  $T$ . д. также называют и величину угла  $A$ , при этом слово «внутренний» часто опускают.

Стороны и углы  $T$ . д. называются основными элементами его.  $T$ . д. является выпуклой фигурой.

В зависимости от величин углов  $T$ . д. бывают остроугольные (все углы острые), прямоугольные (один угол прямой) и тупоугольные (один угол тупой). В зависимости от длин сторон  $T$ . д. подразделяются на разносторонние (все стороны по длине не равны), равносторонние (все стороны равны по длине или конгруэнтны), или правильные, и равнобедренные (две стороны которого конгруэнтны). Иногда  $T$ . д. называют «треугольной пластинкой».  $T$ . д. имеет *размерность*, равную 2. Модели одномерного и двумерного треугольников имеют различные центры тяжести (центроиды): у первого  $T$ . центр тяжести — точка пересечения биссектрис, у второго — точка пересечения медиан; естественно, если  $T$ . равно-сторонний, то центры тяжести одномерного и двумерного  $T$ . совпадают.

Сумма углов  $T$ . д. равна  $2d$ , т. е.  $180^\circ$ , или  $\pi$  (радианам), в геометрии Евклида и непостоянна и меньше  $\pi$  в геометрии Лобачевского, и больше  $\pi$  и непостоянна ( $\pi < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 3\pi$ ) в геометрии Римана.

В абсолютной геометрии справедливы теоремы: против конгруэнтных сторон лежат конгруэнтные углы; углы при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны и др. Однако ряд свойств  $T$ . в плоскости Лобачевского отличается от свойств  $T$ . в плоскости Евклида. Так, в геометрии Лобачевского существуют  $T$ ., вокруг которых нельзя описать окружность; если три угла одного  $T$ . конгруэнтны трем углам другого  $T$ ., то такие  $T$ . конгруэнтны, т. е. в геометрии Лобачевского не существует подобных и неконгруэнтных треугольников.

**4<sup>0</sup>.  $T$ . криволинейный** — плоская фигура, состоящая из трех неколлинеарных точек  $A, B, C$ , трех простых дуг или трех дуг и отрезков, соединяющих эти точки и не имеющих внутренних точек, вместе с внутренней областью. **Пример.** Круговой сектор есть  $T$ . к.

В *проективной геометрии* обычно под  $T$ . понимают *трехвершинник*.

См. также: *Дефект треугольника, Избыток сферического треугольника эксцесса, Сферический избыток.*

**ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ** — см. *Паскаля треугольник*.

**ТРЕУГОЛЬНЫЕ ЧИСЛА** — натуральные числа вида  $n(n+1)/2$ , т. е. 1, 3, 6, 10, ...  $T$ . ч. — частный случай *фигурных чисел*; они составляют арифметический ряд 2-го порядка. Название  $T$ . ч. происходит от того, что ими выражаются числа шаров, центры которых расположены на плоскости в форме правильных треугольников (рис. 114,  $a - e$ ).

См. также: *Многоугольные числа.*

**ТРЕХВЕРШИННИК** в проективной геометрии — три точки, не лежащие на одной прямой, и три прямые, проходящие через каждые две из трех точек. Три точки называются вершинами, три прямые — сторонами  $T$ .  $T$ . двойствен самому себе, т. е. соответствует трехстороннику (трех прямых, не проходящих через одну точку, и трех точек их попарного пересечения),  $T$ . также называют треугольником, понимая его в

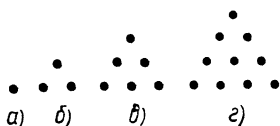


Рис. 114

проективном смысле, т. е. стороны его понимаются не как отрезки, что имеет место в метрической геометрии, а как прямые.

**ТРЕХГРАННИК СОПРОВОЖДАЮЩИЙ** кривой  $\vec{M} = \vec{M}(s)$  (где  $s$  — длина дуги кривой) — три вектора единичной длины: касательный вектор  $\vec{t} = \frac{d\vec{M}}{ds}$ , нормальный вектор  $\vec{n} = \frac{1}{k} \frac{d^2\vec{M}}{ds^2}$  (здесь  $k$  — кривизна кривой) и вектор бинормали  $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$  (здесь  $\vec{t} \times \vec{n}$  означает векторное произведение векторов  $\vec{t}$  и  $\vec{n}$ ).

Если кривая  $M = \vec{M}(t)$  отнесена к произвольному параметру  $t$  (а не к длине дуги  $s$ ), то векторы  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  вычисляются по формулам:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{M}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds},$$

$$\vec{n} = \frac{1}{k} \left[ \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\vec{M}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \right],$$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n},$$

где  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  — компоненты вектора  $\vec{M}(t)$ .

Итак, в каждой точке кривой (там, где  $k \neq 0$ ) рассматриваются три вектора  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$ . При движении точки вдоль кривой эти векторы определенным образом поворачиваются, так сказать, сопровождают точку. Движение этих векторов при равномерном движении точки по кривой описываются формулами Серре — Френе.

Расположение векторов  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  (или  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\nu}$ ,  $\vec{\beta}$ ) относительно кривой можно описать так (рис. 115): вектор  $\vec{t}$  направлен по касательной к кривой в направлении возрастания параметра  $t$ , вектор  $\vec{n}$  лежит в плоскости, «наиболее близкой» к кривой в данной точке, — соприкасающейся плоскости, перпендикулярен вектору  $\vec{t}$  и направлен в сторону вогнутости кривой в данной точке. Вектор  $\vec{b}$  ортогонален  $\vec{t}$  и  $\vec{n}$  и направлен в соответствии с правилом векторного произведения. Т. с. является важнейшим средством исследования кривой.

Лит. [61, 71].

**ТРЕХГРАННЫЙ УГОЛ** — частный случай многогранного угла, когда направляющая конической поверхности есть треугольник. Т. у. можно определить независимо от многогранного угла. Пусть имеются в пространстве три луча с общим началом  $S$ :  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ , не лежащие в одной плоскости, каждый из которых образует с двумя другими лучами плоские углы, по ве-

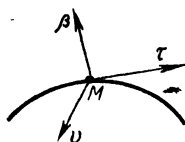


Рис. 115

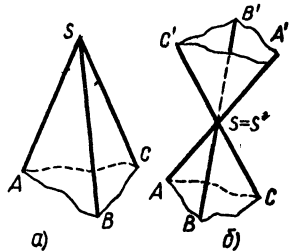


Рис. 116

личине меньше  $180^\circ$  в плоскостях, определяемых двумя лучами (рис. 116, а). Тогда пересечение трех полупространств, первое из которых ограничено плоскостью  $ABS$  и содержит луч  $SC$ , второе — плоскостью  $ACS$  и содержит луч  $SB$ , третье — плоскостью  $BCS$  и содержит луч  $SA$ , называется Т. у. Точка  $S$  называется вершиной этого угла; лучи  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  — ребрами угла; плоские углы  $ASB$ ,  $BSC$ ,  $CSA$  — гранями Т. у. Обозначение Т. у.:  $SABC$  (на первом месте пишут вершину) или кратко:  $\angle S$ . Т. у. как пересечение выпуклых фигур есть выпуклая фигура.

Т. у., все плоские углы которого конгруэнтны, называется правильным; если все плоские углы прямые, то Т. у. называется *прямым*.

Сумма величин плоских углов Т. у. меньше  $360^\circ$ . Каждый плоский угол меньше суммы двух других его плоских углов (под углом понимается величина его). Два выпуклых Т. у., центрально симметричные относительно их общей вершины, называются *вертикальными* (рис. 116, б). Вертикальные Т. у. конгруэнтны. Т. у. — частный случай *телесного угла*.

Плоские углы Т. у. находятся в определенной зависимости с двугранными его углами. Имеет место равенство

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \hat{A},$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — величины плоских углов при вершине Т. у.,  $\hat{A}$  — величина двугранного угла при ребре  $[SA]$ . Аналогичные формулы можно записать и для  $\cos \beta$  и  $\cos \gamma$ .

Величина Т. у. измеряется в *стерадианах*.

**ТРЕХЧЛЕН** — *многочлен*, содержащий в точности три члена.

См. также: *Квадратный трехчлен*, *Биквадратный трехчлен*.

**ТРЕХЧЛЕННОЕ УРАВНЕНИЕ** — уравнение вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

где  $abc \neq 0$ . Т. у. разрешимо в радикалах над полем комплексных чисел.

Решение Т. у. посредством подстановки  $y = x^n$  сводится к решению квадратного уравнения  $ay^2 + by + c = 0$ . Если  $y_1$  и  $y_2$  — корни квадратного уравнения, то корни Т. у. находятся из уравнений  $y_1 = x^n$  и  $y_2 = x^n$ . Т. у. при  $n = 2$  и  $n = 3$  соответственно называются биквадратным и бикубическим уравнениями.

**ТРИАНГУЛЯЦИЯ** двумерного *многообразия*  $X$  (поверхности) — разбиение его на конечное множество  $K$  треугольников, вообще говоря, криволинейных, так, чтобы при этом выполнялись с в о й с т в а: 1) объединение всех треугольников есть все многообразие  $X$ ; 2) пересечение любой пары треугольников из  $K$  либо пусто, либо совпадает с их общей вершиной или общим ребром.

Многообразие, для которого существует Т., называется *триангулируемым*.

**П р и м е р.** Если в сферу  $S^2$  вписать правильный октаэдр и из центра сферы спроектировать его поверхность на сферу, то получим Т. сферы  $S^2$ , состоящую из 8 сферических треугольников.

Лит.: [24].

**ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА** — неравенства, алгебраические относительно *тригонометрических функций* от неизвестного аргумента. Решение Т. н. сводится к решению алгебраических неравенств, а также к решению простейших (основных) Т. н.:  $\sin x < a$ ,  $\sin x > a$ ,  $\sin x = a$  и т. д.

**Пример.** Решить Т. н.  $\operatorname{tg} x \geq 1$ .

В промежутке  $[0; \pi/2[$  тангенс больше 1 или равен 1 для значений  $\pi/4 \leq x < \pi/2$ . Затем общее решение получается прибавлением к  $\pi/4$  и  $\pi/2$  целого числа периодов:  $\pi/4 + \pi k \leq x < \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

См. также: *Тригонометрические уравнения*.

**ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ** — функциональные ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

В комплексной форме Т. р. записывается так:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i n x},$$

где числа  $a_n, b_n, c_n$  называют коэффициентами Т. р. В математике и ее приложениях Т. р. имеют большое значение. С Т. р. связаны решения некоторых задач математической физики (например, задачи о распространении тепла и задачи о колебании струны). Теория Т. р. способствовала развитию теории множеств, теории функций действительного переменного, функционального анализа, теории интегралов Фурье, положила начало общему гармоническому анализу.

См. также: *Фурье ряд*.

Лит.: [86].

**ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ** — уравнения, алгебраические относительно тригонометрических функций от неизвестного аргумента. Обычно под знаком тригонометрической функции, входящей в Т. у., аргумент рассматривается только линейно зависящий от переменной  $x$ , т. е. вида  $qx + k$ , при этом  $q \in \mathbb{Q}$  и  $k \in \mathbb{Z}$ . Т. у. относительно переменной (неизвестного аргумента)  $x$  не является алгебраическим уравнением, а следовательно, Т. у. не имеет степени; однако относительно тригонометрических функций, содержащих неизвестный аргумент (переменную), Т. у. алгебраическое. Решение Т. у. обычно сводится к решению простейших (основных) Т. у:  $\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a$ ; простейшие уравнения мы можем получить в результате применения к первоначальному (данному) уравнению формул сложения и других тождественных преобразований и сведения Т. у. к алгебраическому, содержащему только одну тригонометрическую функцию одного и того же аргумента.

Иногда Т. у. полезно свести к уравнению вида  $f_1(x) f_2(x) = 0$ , где  $f_1$  и  $f_2$  — тригонометрические функции, а затем это уравнение свести к простейшим Т. у. При решении Т. у. иногда можно использовать рациональные подстановки, т. е. замену  $\sin x, \cos x$ , других тригонометрических функций рационально через  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

При изучении тригонометрических уравнений и неравенств целесообразно пояснять решения на графиках. При решении Т. у. вида  $a \sin x + b \cos x + c = 0$  используют введение функции вспомогательного (неопределенного) угла  $\operatorname{tg} \varphi$  или  $\operatorname{ctg} \varphi$  (полагая, например,  $a/b = \operatorname{ctg} \varphi$ ). Важным вопросом при решении Т. у. является равносильность уравнений, вопрос возможной потери и появления корней.

Лит.: [60, 95].

**ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ** — функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс.

**ТРИГОНОМЕТРИЯ** — раздел математики, изучающий зависимость между сторонами и углами (длинами сторон и величинами углов) треугольника, а также свойства тригонометрических функций и связь между ними.

Если треугольник плоский, то Т. называется плоской.

См. также: *Сферическая тригонометрия, Косинусов теорема.*

Лит.: [60, 95].

**ТРИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА** — частный случай полилинейной формы, зависящий от трех систем переменных:

$$x_1, x_2, \dots, x_n;$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n;$$

$$z_1, z_2, \dots, z_n.$$

Таким образом, Т. ф. имеет вид:

$$\sum_{i, j, e=1}^n a_{ij e} x_i y_j z_e = a_{111} x_1 y_1 z_1 + a_{112} x_1 y_1 z_2 + \dots + a_{n-1, n-1, n} x_{n-1} y_{n-1} z_n + \\ + a_{n-1, n, n} x_{n-1} y_n z_n + a_{n, n, n} x_n y_n z_n.$$

**ТРИЛЛИОН** — тысяча миллиардов, или миллион миллионов, т. е. число

$$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000.$$

В некоторых странах Т. называют число  $10^{18}$ .

**ТРИСЕКТРИСА УГЛА** — луч с началом в вершине угла и делящий величину угла в отношении 1 : 2. Т. у. отсекает от угла третью часть его величины.

См. также: *Биссектриса угла, Морли теорема* (о трисектрисах треугольника), *Трисекция угла.*

**ТРИСЕКЦИЯ УГЛА** — задача о делении произвольного угла на три конгруэнтные части (угла) циркулем и линейной. Т. у. — одна из трех знаменитых задач на построение в Древней Греции: *квадратура круга, удвоение куба* и Т. у. Задача о Т. у. сводится к построению циркулем и линейкой корня кубического уравнения вида  $x^3 + px + q = 0$ , которое разрешимо в квадратных радикалах тогда и только тогда, когда это уравнение имеет рациональный корень. Для произвольного данного угла полученное уравнение не имеет рационального корня, отсюда согласно критерию построения отрезка с помощью циркуля и линейки Т. у. не может быть разрешена указанными средствами построений. Например, деление угла в  $60^\circ$  на три равные части не может быть выполнено циркулем и линейкой, а следовательно, построить угол в  $20^\circ$  циркулем и линейкой нельзя, а поэтому нельзя построить этими инструментами правильный и 18-угольник ( $20^\circ = 360^\circ : 18$ ), откуда следует, что нельзя построить правильный 9-угольник теми же средствами, теми же инструментами.

Однако деление угла  $\pi : 2^n$  на три равные части можно выполнить циркулем и линейкой (например, деление угла в  $90^\circ$  на три равные части выполнимо циркулем и линейкой). Как известно, деление всякого угла пополам можно выполнить циркулем и линейкой.

Существуют, однако, другие средства построений, которые позволяют раз-

делить произвольный угол на три равные части: 1) циркулем и линейкой с эталонном длины на ней (с двумя отметками) — «вставкой»; этот механический способ деления угла на три конгруэнтные части был предложен еще Архимедом в III в. до н. э.; 2) с помощью *кónхиды* Никомеда; 3) с помощью двух прямых углов.

Лат. tri — три, sectio — разрезание, рассечение.

Лит.: [95].

**ТРИЭДР** — совокупность трех взаимно перпендикулярных единичных векторов, имеющих общее начало. Т. играет большую роль в дифференциальной геометрии при изучении свойств пространственной кривой, когда рассматривается подвижный Т., вершина которого совпадает с переменной точкой кривой, так что один вектор  $\vec{t}$  его направлен по касательной к кривой, другой вектор  $\vec{n}$  — по главной нормали, а третий вектор  $\vec{b}$  — по бинормали.

Т. также называется *трехгранником сопровождающим* или *трехгранником Серре — Френе*.

**ТРОЙНОЕ ПРАВИЛО** — устаревшее и вышедшее из употребления название правил (приемов) решения задач, содержащих прямо и обратно пропорциональные величины.

См. также: *Прямая пропорциональность, Обратная пропорциональность*.

**ТРОХОИДА** — циклоидальная кривая, которую описывает точка, находящаяся на расстоянии  $h$  от центра круга, катящегося без скольжения по другому кругу. Если  $h = r$  — радиусу катящегося (производящего) круга, то Т. переходит в эпициклоиду или гипоциклоиду. Если производящий круг катится по внешней стороне неподвижного круга, то Т. называется *эпитрохойдой*, если же по внутренней — то *гипотрохойдой*. При  $h > r$  Т. (рис. 117) называют *удлиненной*, при  $h < r$  (рис. 118) — *укороченной*.

Параметрические уравнения эпитрохойды:

$$\begin{aligned} x &= (R + mR) \cos mt - h \cos (t + mt), \\ y &= (R + mR) \sin mt - h \sin (t + mt), \end{aligned}$$

а гипотрохойды:

$$\begin{aligned} x &= (R - mR) \cos mt + h \cos (t + mt), \\ y &= (R - mR) \sin mt + h \sin (t + mt), \end{aligned}$$

где  $R$  — радиус неподвижного круга, а  $m = \frac{r}{R}$ .

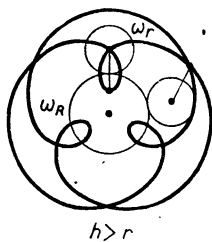


Рис. 117

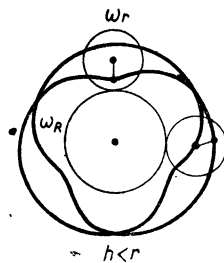


Рис. 118

Особый интерес представляют собой троихоидальные розы. Для таких Т.  $h = R + r = R + mR$ . Их уравнение в полярных координатах можно записать в виде

$$\rho = 2(R + mR) \sin \frac{1}{2m+1} \varphi.$$

При  $R = r$  и добом  $h$  Т. представляет собой так называемую улитку Паскаля; ее уравнение в полярных координатах:

$$\rho = 2(r - h \cos \varphi).$$

При  $R = 2r$  гипотрохида становится эллипсом.

**ТРУБКА ВЕКТОРНАЯ.** Если взять в векторном поле какую-либо замкнутую линию, отличную от векторных линий поля, и через каждую ее точку провести векторную линию, то множество этих линий и дает трубкообразную векторную поверхность, называемую Т. в. Поток вектора через поперечное сечение Т. в. называют интенсивностью векторной трубы; в соленоидальном поле интенсивность есть величина постоянная.

Лит.: [94].

**ТУПОЙ УГОЛ** — угол, больший своего смежного, Т. у. всегда по величине больше величины *прямого угла* и меньше величины *развернутого угла*.

См. также: *Смежные углы*, *Угол*.

**ТУЭ ТЕОРЕМА** — теорема, относящаяся к решениям неопределенных уравнений и приближениям иррациональных чисел рациональными. Она доказана в 1908 г. норвежским математиком Туэ в следующей формулировке: неопределенное уравнение

$$f(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \dots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n = 0$$

совсем не имеет или имеет лишь конечное число целых решений  $x$  и  $y$ , если

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

есть целочисленный *неприводимый* многочлен степени выше второй.

Т. т. позднее была усилена и обобщена Зигелем, Морделем, А. Вейлем и другими авторами.

# у

**УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ:** У. ф. в точке. Функция  $y = f(x)$ , определенная в окрестности точки  $a$ , называется убывающей в точке  $a$ , если существует такая окрестность точки  $a$ , что для любых значений  $x_1, x_2$  из этой окрестности ( $x_1 < a < x_2$ ) выполняются неравенства  $f(x_1) > f(a) > f(x_2)$ , т. е. знак приращения функции в точке  $a$  противоположен знаку приращения аргумента. В случае выполнения нестрогих неравенств  $f(x_1) \geq f(a) \geq f(x_2)$  функция называется невозрастающей в точке  $a$ . Дифференцируемая в точке  $a$  функция является убывающей в этой точке, если  $f'(a) < 0$ .

У. ф. на отрезке — см. *Убывающая функция*.

Лит.: [57].

**УБЫВАЮЩАЯ АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ** — арифметическая прогрессия, разность которой отрицательна:  $d < 0$ .

**УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ** — геометрическая прогрессия, знаменатель которой по модулю меньше единицы:  $|q| < 1$ .

**УБЫВАЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ** — последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , для которой каждый следующий член меньше предыдущего:  $a_{n+1} < a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). В случае выполнения нестрогого неравенства  $a_{n+1} \leq a_n$  последовательность называется невозрастающей. Невозрастающая ограниченная снизу последовательность имеет конечный предел.

**УБЫВАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ** на отрезке  $[a; b]$  (или интервале, или множестве) — функция  $y = f(x)$ , для которой при любых  $x_2 > x_1$  из отрезка (интервала, множества) выполняется неравенство  $f(x_2) < f(x_1)$ . В случае выполнения нестрогого неравенства  $f(x_2) \leq f(x_1)$  функция называется невозрастающей на отрезке. Дифференцируемая на отрезке  $[a; b]$  или интервале  $]a; b[$  функция является невозрастающей на нем в том и только в том случае, когда  $f'(x) \leq 0$  для  $x \in [a, b]$ . Убывание функции на отрезке не следует смешивать с понятием убывания функции в точке.

**УГЛОВАЯ ТОЧКА** кривой  $y = f(x)$  — такая особая точка функции  $f(x)$ , для которой существуют лишь односторонние пределы отношения  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow +0$  или  $\Delta x \rightarrow -0$ ; их называют односторонними производными. На графике функ-



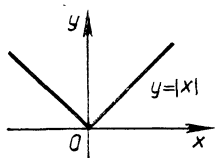


Рис. 119

ции (для кривой  $y = f(x)$ ) в соответствующей У. т. существуют лишь односторонние касательные, составляющие угол. Например, для функции

$$y = |x| \quad \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \text{ при } \Delta x \rightarrow +0$$

и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \text{ при } \Delta x \rightarrow -0.$$

Значит, для нее начало координат — У. т., а односторонние касательные представляют собой биссектрисы первого и второго координатных углов (рис. 119). У. т. называется также точкой излома.

**УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ** прямой на плоскости относительно декартовой прямоугольной системы координат — тангенс угла между этой прямой и положительным направлением оси  $Ox$  данной системы координат. Если прямая задана уравнением  $y = kx + b$ , то  $k$  является ее У. к. К такому виду может быть приведено уравнение прямой общего вида  $ax + by + c = 0$ , если  $b \neq 0$ . При  $b = 0$  У. к. условно считается равным  $\infty$ . В этом случае прямая перпендикулярна оси  $x$ . По У. к. двух прямых  $k_1$  и  $k_2$  можно определить тангенсы углов между этими двумя прямыми: если  $k_1 k_2 = -1$ , то угол прямой, а если  $k_1 k_2 \neq -1$ , то

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

**УГОЛ** — одна из частей плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом. Всякий выпуклый У. может быть рассмотрен как фигура, являющаяся пересечением двух полуплоскостей. Для обозначения У. используют такие записи: угол  $ABC$ , или  $\angle ABC$ , или  $\angle B$ .

Величина угла  $ABC$  записывается иначе:  $\widehat{ABC}$ , или  $\widehat{B}$ . Конгруэнтные У. имеют равные величины (угловые меры); и наоборот, если величины двух углов равны, то углы конгруэнтны. Если стороны У. образуют одну прямую, то У. называется *развернутым*. Граница У., отличного от развернутого, делит плоскость на две области, на два множества точек, одно из которых выпуклое, другое — невыпуклое. Точки области, принадлежащей У., называют в н у т р е н н и м и, а не принадлежащие У. — в н е ш н и м и. Если внутренняя область угла, отличного от развернутого, выпуклая, то говорят, что У. меньше развернутого; если же внутренняя область У. невыпуклая, то говорят, что У. больше развернутого. У., конгруэнтный своему смежному, называется п р я м ы м. Рассматривают также вырожденные, предельные случаи У. Так, У., величина которого равна  $2\pi$  ( $360^\circ$ ), называется п о л н ы м У. Стороны полного У. совпадают, и множество его точек заполняет все множество точек плоскости.

При пересечении двух прямых, лежащих в плоскости, третьей прямой (рис. 120) углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются соответственными; углы 2 и 5, 3 и 8 — внутренними односторонними, а углы 1 и 6, 4 и 7 — внешними односторонними; 3 и 5, 2 и 8 — внутренними накрест лежащими; 1 и 7, 4 и 6 — внешними накрест лежащими. Доказывается, что если какие-либо два соответственных (внутренних или внешних накрест лежащих) У. при пересечении двух прямых третьей конгруэнтны, то эти две прямые параллельны.

См. также: *Двугранный угол, Трехгранный угол, Телесный угол, Радиан, Стерadian.*

**УГОЛ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ** при точке  $A$  по отношению к прямой  $l$  ( $A \notin l$ ) — острый угол  $\alpha$  в плоскости Лобачевского, образованный перпендикуляром, проведенным из точки  $A$  на прямую  $l$ , и одной из двух прямых  $l_1, l_2$ , проходящих через точку  $A$  и параллельных прямой  $l$  в одном из двух направлений этой прямой  $l$  (рис. 121). Длина перпендикуляра  $p = |AP|$  называется стрелкой У. п.; стрелка зависит от У. п.: с возрастанием (убыванием) стрелки У. п. убывает (возрастает).

См. также: *Параллельные прямые* (в геометрии Лобачевского).

**УДВОЕНИЕ КУБА** — задача о построении куба, объемом которого вдвое больше, чем объем данного куба. У. к. сводится к решению уравнения  $x^3 - 2 = 0$ , если положить длину ребра куба  $a = 1$ . Однако корень полученного уравнения нельзя построить циркулем и линейкой согласно критерию построения отрезков. Неразрешимость задачи У. к. строго доказал (1837) французский математик П. Ванцель. У. к. называют также делосской задачей (неправильно иногда ее называют делийской), что связано с названием острова Делоса (Эгейское море), на котором, по преданию, разразилась эпидемия и оракул посоветовал увеличить объем кубического жертвенника в два раза, не нарушая его формы, чтобы избавиться от эпидемии.

У. к., однако, разрешимо, как показал уже Менехм (IV в. до н. э.) с помощью конических сечений: длина отрезка  $x$  (корень уравнения  $x^3 - 2 = 0$ ) может быть построена как абсцисса одной из точек пересечения парабол  $x^2 = ay$  и  $y^2 = 2ax$  или параболы  $x^2 = ay$  и гиперболы  $xy = 2a^2$  и другими способами.

См. также: *Квадратура круга, Трисекция угла.*

Лит.: [95].

**УЗЕЛ** — всякая кривая из семейства узлов (см. *Узлы*). В частности, узлами являются каппа, *строфоида*. Инверсия У. с центром инверсии в начале координат есть также У., конгруэнтный данному, но повернутый вокруг начала на  $90^\circ$ . См. У. также в термине *Особая точка*.

**УЗЛОВАЯ ТОЧКА** — особая точка кривой, иначе называется *самопересечения точкой*.

**УЗЛЫ** — семейство плоских кривых, уравнение которых в полярных координатах имеет вид:  $\rho = a \operatorname{ctg} k\varphi$ . Все эти кривые имеют в начале координат (в полюсе) узловую точку и асимптоты, параллельные осям координат (полярная ось совпадает с осью  $Ox$ ).

У. есть каппа при  $k = 1$ ; есть *строфоида* при  $k = 1/2$  и называется *ветряной мельницей* при  $k = 2$ .

**УЛИТКА ПАСКАЛЯ** — плоская кривая, определяемая как множество точек  $M$  и  $M'$ , расположенных на прямых пучка с центром в точке  $O$ , лежащей на данной окружности, и находящихся на равном расстоянии  $a$  по обе стороны от

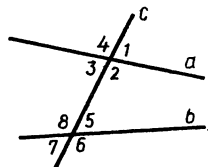


Рис. 120

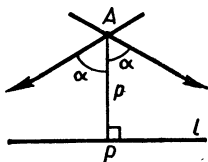


Рис. 121

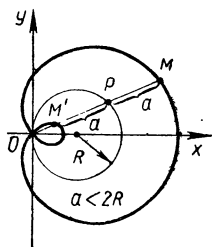


Рис. 122

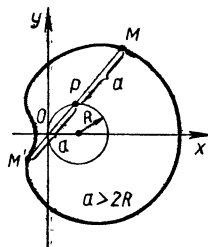


Рис. 123

точки пересечения  $P$  прямых пучка с окружностью. На рисунках 122, 123 У. П. изображена жирной линией. Полярное уравнение У. П. имеет вид:

$$\rho = 2R \cos \varphi + a,$$

где  $R$  — радиус данной окружности,  $\varphi$  — полярный угол радиуса вектора текущей точки У. П. Если  $a = 2R$ , то петля У. П. (сплошная линия внутри данной окружности) стягивается в точку и У. П. вырождается в этом случае в *кардиои-ду*. Если  $a > 2R$  (рис. 123), то У. П. не имеет общих точек пересечения с данной окружностью.

В прямоугольных координатах уравнение У. П. имеет вид:

$$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Таким образом, У. П. — алгебраическая кривая 4-го порядка. У. П. названа в честь Этьена Паскаля — отца французского ученого Б. Паскаля, впервые изучившего ее.

Лит.: [74].

**УМНОЖЕНИЕ** — операция образования по двум объектам  $a$  и  $b$  (множителями или сомножителям) третьего объекта  $c$  (произведения). Знак  $U \times$  ввел (1631) английский математик У. Оутред, а знак  $U$  в виде точки « $\cdot$ » ввел немецкий математик Лейбниц (1698). При буквенном обозначении множителей эти знаки У. часто опускают, пишут  $ab$  вместо  $a \times b$  или  $a \cdot b$ . В понятие операции У. вкладывается различный смысл в зависимости от природы множителей. Для целых положительных  $a$  и  $b$  их произведение есть сумма  $b$  слагаемых, каждое из которых равно  $a$ , т. е.  $ab = \underbrace{a + a + \dots + a}_b$ .

У. дробей определяют равенством  $(m/n) (p/q) = mp/nq$ . При У. рациональных чисел получается число, равное произведению модулей сомножителей со знаком «+», если оба множителя имеют одинаковые знаки, и со знаком «−», если они имеют разные знаки. У. иррациональных чисел понимают как У. их рациональных приближений. У. комплексных чисел определяется равенствами:

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc) \text{ или}$$

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

У. комплексных чисел обладает свойствами *коммутативности*, *ассоциативности*, *дистрибутивности* и  $z \cdot 0 = 0$ ,  $z \cdot 1 = z$ .

См. также: *Кватернионы*, *Векторное произведение*, *Умножение подстановок*.

**УМНОЖЕНИЕ ПОДСТАНОВОК** — операция, ставящая в соответствие упо-

рядоченной паре *подстановок*  $n$ -й степени третью подстановку той же степени. Если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} i_1 i_2 & \dots & i_n \\ j_1 j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

то по определению

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

На языке отображений это *композиция отображений*  $A$  и  $B$ .

Множество всех подстановок  $n$ -й степени образует относительно операции  $U$ . п. *симметрическую группу*  $n$ -й степени.  $U$ . п. некоммутативно, так как закон коммутативности для произвольных подстановок не выполняется. Например, пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ но } BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА** (или просто **АЛГЕБРА**) — алгебраическая система, в которой множество *предикатов* или отношений  $\Omega_p$  пусто. Частными случаями  $U$ . а. являются *группы, кольца, группоиды, квазигруппы, структуры* и т. д. Понятие  $U$ . а. было введено американским математиком Г. Биркгофом в 1933 г.

Лит.: [48, 55].

**УНИКУРСАЛЬНАЯ КРИВАЯ** — плоская кривая, которую можно обойти, побывав дважды только в точках самопересечения. Будем называть точку кривой четным узлом, если из нее выходит четное число путей, и нечетным узлом, если через точку проходит нечетное число путей. Так, все внутренние точки отрезка есть четные узлы, а концы его — нечетные. Тогда верна теорема: для того чтобы кривая была *уникурсальной*, необходимо и достаточно, чтобы у нее было не более двух нечетных узлов. Легко видеть, что не существует кривой с одним нечетным узлом. Таким образом, если кривая *уникурсальна*, то число нечетных узлов равно либо 0, либо 2 и наоборот.

В анализе важен особый случай  $U$ . к., а именно такие алгебраические кривые, которые имеют максимальное число двойных точек, включая несобственные и мнимые двойные точки. Максимальное число  $\delta$  двойных точек для алгебраической кривой  $n$ -го порядка вычисляется по формуле  $\delta = (n-1)(n-2)/2$ , причем точки кратности  $k$  рассматриваются как  $C_k^2$  двойных точек.

Алгебраические  $U$ . к. играют важную роль в теории интегралов алгебраических функций. Всякий интеграл  $\int R(x, y) dx$ , где  $y$  — функция от  $x$ , определяемая уравнением  $F(x, y) = 0$ , задающим алгебраическую  $U$ . к., а  $R(x, y)$  — рациональная функция своих аргументов, приводит к интегралу от рациональных функций и выражается в элементарных функциях.

**УНИМОДУЛЯРНАЯ ГРУППА** — группа всех матриц с  $n$  строками и  $n$  столбцами, определитель которых равен единице относительно операции мат-

ричного умножения. В общем случае  $У. г.$  называют группу, изоморфную группе таких матриц, элементами которых могут быть даже не матрицы.  $У. г.$  является *группой Ли*. Рассматриваются также унимодулярные подгруппы различных групп матриц, т. е. подгруппы данной группы, состоящие из матриц данной группы и имеющие определитель, равный единице.

Лит.: [78].

**УНИМОДУЛЯРНАЯ МАТРИЦА** — квадратная матрица, определитель которой равен единице. Линейные преобразования, задаваемые  $У. м.$ , отнесенной к любому базису, обладают одним замечательным свойством: они сохраняют объем любой фигуры. Совокупность всех  $У. м.$  образует *унимодулярную группу*.

См. также: *Матрица*.

Лит.: [78].

**УНИМОДУЛЯРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ** — линейное преобразование линейного пространства, при котором сохраняется объем. Матрица  $У. п.$  в любом базисе имеет определитель, равный единице. Всевозможные  $У. п.$  образуют унимодулярную группу.

**УНИТАРНАЯ МАТРИЦА** — квадратная невырожденная матрица  $A$ , удовлетворяющая условию:  $A^{-1} = \overline{A'}^T$ , где  $A^{-1}$  означает обратную матрицу,  $\overline{A'}$  — транспонированную и комплексно-сопряженную матрицу.  $У. м.$  есть матрица линейного преобразования комплексного линейного пространства, сохраняющего *эрмитову форму*:

$$x_1 \overline{x}_1 + x_2 \overline{x}_2 + \dots + x_n \overline{x}_n,$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — координаты вектора пространства, и отнесенного к ортонормированному относительно этой формы базису. Определитель  $У. м.$  по модулю равен единице. Все характеристические корни  $У. м.$  по модулю равны единице. Всякая (вещественная) ортогональная матрица есть в то же время  $У. м.$

Лит.: [78].

**УНИТАРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ** конечномерного комплексного линейного пространства — линейное преобразование, сохраняющее положительно определенную эрмитову форму  $x_1 \overline{x}_1 + x_2 \overline{x}_2 + \dots + x_n \overline{x}_n$ . В ортонормированном базисе относительно эрмитова произведения, задаваемого этой формой,  $У. п.$  записывается *унитарной матрицей*. Эрмитову форму  $У. п.$  можно привести к диагональному виду.  $У. п.$  есть обобщение понятия вращения на случай комплексного линейного пространства.

Лит.: [78].

**УНИТАРНЫЙ ОПЕРАТОР** — обобщение понятия вращения евклидова пространства на бесконечномерный случай.  $У. о.$  гильбертова пространства есть линейное преобразование гильбертова пространства, сохраняющее определенное там скалярное произведение.  $У. о.$  обладает обратным оператором, который тоже является унитарным.  $У. о.$  и обратный ему оператор являются сопряженными операторами; примером  $У. о.$  служит преобразование Фурье (см. *Фурье преобразование*).  $У. о.$  — важное понятие функционального анализа и операторного исчисления.

**УНИЧТОЖЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ** в знаменателе дроби — тождественное преобразование дроби, в знаменателе которой имеется *иррациональное*

**выражение**, к дроби, знаменатель которой не содержит иррационального выражения (радикалов). У. и. в знаменателе приводит к упрощению вычисления, если заменить дробь ее десятичным приближением, например:  $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 = 1,4$  с точностью до  $10^{-1}$ .

Если в знаменателе дроби содержится иррациональное выражение вида  $a + b\sqrt{2}$ , то освобождение от иррациональности или У. и. производится путем умножения числителя и знаменателя на выражение  $a - b\sqrt{2}$ ; после чего знаменатель дроби будет равен  $a^2 - 2b^2$  и не будет содержать уже иррациональных выражений.

**УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО** (частично упорядоченное множество). Множество  $\Omega$  называется упорядоченным, если в нем введено *бинарное отношение* порядка  $\leq$ , т. е. для некоторых пар элементов  $a \in \Omega$  и  $b \in \Omega$  выполняется следующее: или  $a$  предшествует  $b$  (обозначается:  $a \leq b$ ), или  $b$  предшествует  $a$  (обозначается:  $b \leq a$ ) и выполняются свойства: *транзитивности* если  $a \leq b$  и  $b \leq c$ , то  $a \leq c$ ; *рефлексивности*  $a \leq a$  и *антисимметричности*:  $a \leq b$  и  $b \leq a \Rightarrow a = b$ .

Например, любое *подмножество* множества действительных чисел есть У. м., если отношение порядка совпадает с отношением «больше или равно». Множество называется *линейно* (совершенно) *упорядоченным*, если для всех, а не только для некоторых пар элементов  $a$  и  $b$  множества выполняется альтернатива  $a \leq b$  или  $b \leq a$  относительно заданного отношения *порядка*.

**Пример.** Рассмотрим множество  $A$  всех подмножеств данного множества  $\Omega$ . В множестве  $A$  можно ввести отношение частичного порядка так, чтобы  $A$  стало частично упорядоченным множеством. Именно:  $a \leq b$ , если  $a$  как подмножество  $\Omega$  содержится в подмножестве  $b$ . Следует отметить, что если одно множество из двух данных не содержится целиком в другом, то отношение порядка  $\leq$  для них не определено. Иногда вводят еще отношение *строгого* порядка:  $a < b \Leftrightarrow a \leq b$  и  $a \neq b$ . Понятие У. м. применяется в различных разделах математики, например в алгебре и функциональном анализе.

**УРАВНЕНИЕ** — в первоначальном понимании — есть равенство, содержащее одну или несколько переменных (неизвестных): Например,  $2x - 6 = 0$  — это У. с одной переменной (с одним неизвестным);  $x + y = 1$  — У. с двумя переменными (с двумя неизвестными). При дальнейшем изучении математики У. рассматриваются с функциональной точки зрения: У. с одним неизвестным (аргументом, числом) есть равенство двух функций  $f_1(x) = f_2(x)$ , рассматриваемых в их общей области определения. Аналогично определяются У. с несколькими неизвестными:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

для  $n$ -мерного случая. **Решениями** У. называются те значения неизвестных (аргументов), при которых значения рассматриваемых функций равны. Если функции, входящие в У., — многочлены от переменных (неизвестных)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то У. называется алгебраическим. Алгебраическое У. с одним неизвестным можно записать в виде  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  ( $a_0 \neq 0$ ),  $a_i$  — комплексные числа,  $i = 0, 1, \dots, n$ , где натуральное число  $n$  называется степенью алгебраического У. Всякое алгебраическое У. ненулевой степени име-

ет по крайней мере один корень — комплексный, мнимый или действительный. Алгебраическое У. степени выше четвертой ( $n > 4$ ) в общем виде в радикалах неразрешимо. У.  $x^2 - 2 = 0$  не имеет решений (неразрешимо) в области рациональных чисел, но имеет два решения (корня) в области (в множестве) действительных чисел:  $x_1 = \sqrt{2}$ ;  $x_2 = -\sqrt{2}$ . У. же  $x^2 + 1 = 0$  не имеет решений в множестве действительных чисел, но имеет два решения  $x_1 = i$  и  $x_2 = -i$  в множестве комплексных чисел. Если в У. входят трансцендентные функции от неизвестных, то такие У. называются трансцендентными. Так, У.

$$x\sqrt{2} = 3; \sin x = 1; \lg x = x + \sin x; 2^x = 4; \\ \arcsin x = 0,5; \sin x = 2; \{x\} = 1,5; [x] = 0,3)$$

являются трансцендентными; последние три У. не имеют решений в области действительных чисел. Часто трансцендентные У. решаются приближенными методами: разложением функций в ряд, графическим путем; методом итераций и т. д.

Два У. называются равносильными (эквивалентными), если каждое решение первого У. является решением второго и, наоборот, каждое решение второго У. является решением первого или если оба уравнения не имеют решений над данным множеством чисел. Иначе, два У. называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений (корней); в частности, таким множеством решений может быть пустое множество. Так, У.  $x - 1 = 0$  и  $(x - 1)(x^2 + 1) = 0$  равносильны над множеством действительных чисел и не равносильны над множеством комплексных чисел.

При решении У. необходимо следить за областью определения функций, входящих в У. (эта область может быть расширена или сужена), так как при этом могут быть приобретены посторонние корни: У. или: потеряны его корни. У.  $f_1(x) = f_2(x)$  называется дробно-рациональным, если функции  $f_1$  и  $f_2$  рациональные и по крайней мере одна из них не является многочленом. Иначе, У. называется дробно-рациональным, если неизвестное входит в знаменатель дроби, содержащейся в У.; решение таких У. сводится к решению алгебраических У. Рассматриваются также иррациональные У., неизвестное в которых входит под знак радикала.

См. также: Диофантовы уравнения, Логарифмическое уравнение, Показательные уравнения, Тригонометрические уравнения, Галуа теория, Руффини — Абеля теорема, Основная теорема алгебры. Лит.: [95].

**УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ** — математическая дисциплина, изучаемая во многих высших учебных заведениях, состоящая в математическом описании явлений, связанных с некоторыми физическими процессами. При этом в основном рассматриваются только те процессы, которые описываются с помощью уравнений в частных производных и (реже) с помощью интегральных уравнений или интегро-дифференциальных уравнений.

Особое место в У. м. ф. занимает теория уравнений с частными производными второго порядка:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad (*)$$

где  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $b_i$ ,  $c$  — заданные функции переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 2$ ). Свойства решения этих уравнений существенно зависят от знаков корней характеристического уравнения  $\det(\|a_{ik}\| - \lambda E) = 0$ . Если все корни имеют одинаковый знак, то уравнение (\*) называют уравнением эллиптического типа; если знак одного корня противоположен знаку остальных  $n - 1$  корней, то — гиперболического типа; если же один корень равен нулю, а все остальные одного знака, — то параболического типа; другие комбинации знаков корней мало изучены.

К уравнениям эллиптического типа приводит изучение различных стационарных процессов (электростатика, магнитостатика, потенциальное движение несжимаемой жидкости и т. п.). Простейшим из них являются уравнения  $\Delta u = 0$  (Лапласа) и  $\Delta u = c$  (Пуассона), а также уравнение, рассматривавшееся Эйлером:  $\Delta u + ku = 0$ , и полигармонические уравнения.

Уравнения параболического типа получаются при исследовании таких физических явлений, как теплопроводность, диффузия, распространение электромагнитных волн в проводящих средах, движение вязкой жидкости. Простейшим из них является уравнение теплопроводности.

К уравнениям гиперболического типа приводят задачи о колебаниях сплошных сред и задачи об электромагнитных колебаниях.

Простейшим из них является волновое уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$  (Эйлер, 1759).

Для уравнения  $u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  (Трикоми, 1923) полуплоскость  $y > 0$  ( $-\infty < x < \infty$ ) служит зоной эллиптичности, полуплоскость  $y < 0$  — гиперболическости, прямая  $y = 0$  — параболическости; это уравнение смешанного типа. Решению У. м. ф. посвящены работы известных математиков: Эйлер, Даламбера, Лапласа, Римана, Фурье.

См. также: *Метод характеристик, Фурье метод, Лапласа уравнение, Пуассона уравнение, Дирихле задача, Неймана задача, Грина функция*.

Лит.: [82].

**УРОВНЯ ЛИНИИ** — линии в двумерном скалярном поле  $u(x, y)$ , для которых  $u(x, y) = C$ ; при этом часто требуется, чтобы  $u(x, y)$  имела непрерывные частные производные и чтобы эти производные не обращались все одновременно в нуль. Каждому значению постоянной  $C$  соответствует определенная У. л. У. л. не пересекаются между собой. Градиент скалярного поля в каждой точке поля направлен по нормали к У. л.

Лит.: [87, 94].

**УРОВНЯ ПОВЕРХНОСТИ** — поверхности в скалярном поле  $u(x, y, z)$ , определяемые уравнением  $u(x, y, z) = C$  ( $u(x, y, z)$  имеет непрерывные частные производные, которые не обращаются все одновременно в нуль). Каждой У. п. соответствует свое значение константы  $C$ . Вся рассматриваемая область заполнена этими поверхностями так, что через каждую точку ее проходит одна и только одна У. п. Ясно, что У. п. между собой не пересекаются. Градиент скалярного поля направлен в каждой точке по нормали У. п., проходящей через эту точку.

Лит.: [87, 94].



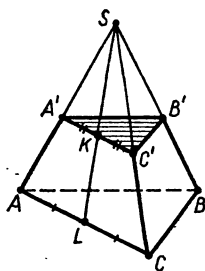


Рис. 124

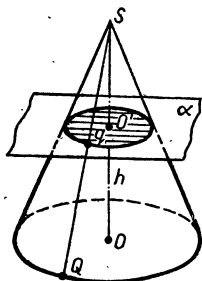


Рис. 125

**УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА** — часть пирамиды, ограниченная нижним основанием, частями боковых граней и сечением пирамиды плоскостью, параллельной основанию и не проходящей через вершину пирамиды. У. п. называется правильной, если она получена из правильной пирамиды. Расстояние между секущей плоскостью и плоскостью основания У. п. называется ее высотой. На рисунке 124 изображена треугольная У. п.  $ABCA'B'C'$ ; треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  называются основаниями У. п. Если У. п. — правильная, то отрезок  $KL$  (или длина его) апофемы  $SL$  полной пирамиды называется апофемой У. п. Объем У. п. с площадями оснований  $q$  и  $Q$  и высотой  $h$  вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} h (q + Q + \sqrt{qQ})$$

(См. также: *Усеченный конус*).

**УСЕЧЕННЫЙ КОНУС** — часть конуса, ограниченная нижним основанием, частью боковой поверхности и сечением конуса плоскостью, параллельной основанию и не проходящей через вершину конуса. У. к., полученный из полного кругового конуса, называется прямым круговым У. к. или проще: У. к. Расстояние между секущей плоскостью и плоскостью основания полного конуса называется высотой У. к. Плоская фигура, полученная от пересечения конуса плоскостью (рис. 125), параллельной основанию конуса и не проходящей через его вершину, называется верхним основанием У. к.

Если площади верхнего и нижнего оснований У. к. соответственно равны  $q$  и  $Q$ , а высота  $h$ , то его объем вычисляется по формуле  $V_{\text{ус. кон}} = \frac{1}{3} h (q + Q + \sqrt{qQ})$ . Если  $q$  и  $Q$  — площади кругов соответственно радиусов  $r$  и  $R$ , то объем У. к. выразится формулой

$$V = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + R^2 + rR).$$

У. к. можно получить путем вращения равнобокой трапеции вокруг ее оси симметрии или вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, совпадающей с высотой.

См. также: *Усеченная пирамида*.

**УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ** события  $B$  при условии  $A$  обозначается  $P_A(B)$  и имеет смысл, если вероятность  $P(A)$  события  $A$  отлична от нуля. У. в.  $P_A(B)$  определяется формулой

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)},$$

где  $P(AB)$  — вероятность одновременного наступления событий  $A$  и  $B$ .

Лит.: [17].

**УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ** бесконечного ряда. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, а ряд, составленный из модулей  $|a_n|$ , расходится, то говорят об условной, или неабсолютной, сходимости первоначального ряда.

Примерами могут служить ряды лейбниевского типа:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/(2n-1)$ . Эти ряды сходятся, но ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся. К числу условно сходящихся рядов относятся также ряды:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^s n} \text{ и } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n (\ln \ln n)^s} \text{ при } 0 < s \leq 1.$$

В противоположность абсолютно сходящимся рядам условно сходящиеся ряды не обладают переместительным свойством; в каждом таком ряду надлежащей перестановкой членов можно изменить его сумму или даже вовсе нарушить сходимость. Согласно теореме Римана, если ряд сходится неабсолютно, то, какое бы ни было наперед заданное число  $B$  (конечное или равное  $\pm\infty$ ), можно так переставить члены в этом ряду, что преобразованный ряд будет иметь своей суммой именно число  $B$ . Так, например, если в ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2 \quad (*)$$

переставить члены так, чтобы после одного положительного следовали два отрицательных:  $1 - 1/2 - 1/4 + 1/3 - 1/6 - 1/8 + \dots + 1/(2k-1) - 1/(4k-2) - 1/(4k) + \dots$ , то получившийся ряд имеет сумму  $0,5 \ln 2$ , т. е. вдвое меньшую, чем (\*).

Лит.: [87].

**УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ.** Функция  $n+m$  переменных  $f(x_1, \dots, x_{n+m})$  имеет в точке  $M_0(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0)$ , удовлетворяющей уравнениям связи:

$$\Phi_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0, \text{ где } i = 1, 2, \dots, m;$$

У. э., если неравенство  $f(x_1, \dots, x_{n+m}) \leq f(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0)$  выполняется в некоторой окрестности точки  $M_0$  для всех ее точек  $(x_1, \dots, x_{n+m})$ , удовлетворяющих уравнениям связи.

Для фактического отыскания У. э. функций применяется *Лагранжа метод* неопределенных множителей.

Лит.: [87].

**УСТОЙЧИВОСТЬ** решений дифференциальных уравнений — важное понятие качественной теории дифференциальных уравнений; имеет большое значение для приложений в механике и технике.

Пусть имеется система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (*)$$

и  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  есть решение этой системы, принимающее при  $t = t_0$  начальные значения  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ . Оно называется устойчивым, если всякое другое решение, начальные данные которого мало отличаются от  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ , будет мало отличаться от него и при всех значениях  $t$ .

Виднейшее место в теории У. занимают работы А. М. Ляпунова. Важное значение имеет случай, когда правые части системы от  $t$  не зависят и на устойчивость надо исследовать нулевое решение, т. е.  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ . Оно существует, если  $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ . Обычно поступают так. Разлагают функции  $f_i$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0)$  и отбрасывают члены порядка малости выше первого. Тогда система запишется так:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n p_{ik} x_k.$$

Если вещественные части характеристических корней матрицы  $p_{ik}$  отрицательны, то нулевое решение системы устойчиво; если же хотя бы у одного характеристического корня вещественная часть положительна, то нулевое решение системы неустойчиво. Эту теорему доказал А. М. Ляпунов.

А. М. Ляпунов создал и другой метод исследования устойчивости, основанный на понятии так называемой функции Ляпунова:

В случае, когда правые части системы (\*) зависят от  $t$ , чаще всего изучаются уравнения с правыми частями, периодическими по  $t$ : Здесь очень интересные критерии устойчивости решений уравнения  $\frac{d^2x}{dt^2} = p(t)x$  получены А. М. Ляпуновым.

За последние годы в связи с развитием техники теория У. приобрела очень большое значение. Выходит немало работ, посвященных этой теории. Большинство этих исследований опирается на идеи А. М. Ляпунова.

Лит.: [67].\*



**ФАКТОР-ГРУППА** группы  $G$  по ее нормальному делителю  $H$  — группа  $Z$ , элементами которой являются *смежные классы* группы  $G$  по *подгруппе*  $H$ . Групповая операция умножения в  $Z$  определяется следующим образом. Произведением смежных классов  $aH$  и  $bH$  (элементов группы  $Z$ ) считается смежный класс, содержащий элемент  $ab$ . Можно доказать, исходя из свойств нормального делителя, каковым является подгруппа  $H$ , что это определение произведения в  $\Phi$ -г. не зависит от выбора представителей в смежных классах. Аналогично определяется операция взятия обратного элемента в группе  $Z$ .  $\Phi$ -г. обозначается  $G/H$ .

**Примеры.** 1.  $\Phi$ -г. группы действительных *невырожденных матриц* порядка  $n$  с положительным определителем по подгруппе *скалярных матриц* есть группа, изоморфная группе матриц с определителем, равным единице.

2.  $\Phi$ -г. *симметрической группы* подстановок по подгруппе четных подстановок есть группа второго порядка, т.е. группа из двух элементов, которая с точностью до *изоморфизма* единственна.

3.  $\Phi$ -г. *аддитивной группы* целых чисел по подгруппе четных чисел изоморфна  $\Phi$ -г. предыдущего примера.

Лит.: [37, 42, 48].

**ФАКТОРИАЛ** — функция, определенная на множестве целых неотрицательных чисел, значение которой равно произведению натуральных чисел от 1 до данного натурального числа  $n$ . Обозначается  $\Phi$ . так:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = \prod_{i=1}^n i$ .

По определению  $0! = 1$ . В математике  $\Phi$ . используется в самых различных формулах: в *комбинаторике*, в рядах *Тейлора*, *Стирлинга формуле* и др.

Название  $\Phi$ . происходит от английского слова factor — множитель.

**ФАЛЕСА ТЕОРЕМА** — одна из теорем школьного курса геометрии (планиметрии) о пропорциональных отрезках. Формулировка  $\Phi$ . т.: если на одной прямой отложить несколько конгруэнтных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой отрезки, конгруэнтные между собой. На основании  $\Phi$ . т. доказывается теорема о средней линии треугольника, решаются задачи о делении отрезка на несколько конгруэнтных отрезков.

**ФЕДОРОВСКИЕ ГРУППЫ** — понятие геометрии, используемое в кристаллографии. Совокупность ортогональных преобразований евклидова пространства называется Ф. г., если: 1) она образует *группу*; 2) хотя бы для одной точки  $M$  пространства существует число  $r$  такое, что внутри шара радиуса  $r$  с центром в точке  $M$  нет гомологических точек (условие дискретности); 3) существует такое  $R > 0$ , что, где бы ни вырезать из пространства шар радиуса  $R$ , в этом шаре есть точки, гомологичные  $M$ . Имеется 230 различных (неизоморфных) трехмерных Ф. г.

Этот факт был открыт в 1890—1891 гг. русским ученым Е. С. Федоровым (и независимо от него немецким математиком А. Шёнфлисом).

**ФЕЙЕРБАХА ТЕОРЕМА** — утверждение о том, что *окружность девяти точек* касается вписанной окружности и трех внеписанных окружностей. Точки касания окружности девяти точек и окружностей, вписанной и внеписанных, называются точками Фейербаха. Ф. т. названа по имени немецкого математика Карла Фейербаха (1800—1834) — брата известного философа Людвига Фейербаха.

Лит.: [41].

**ФЕРМА БОЛЬШАЯ ТЕОРЕМА**, или Ферма проблема, — утверждение французского ученого Пьера Ферма о том, что уравнение  $x^n + y^n = z^n$  (где  $n$  — целое число, большее двух) не имеет решений в целых положительных числах. Несмотря на утверждение П. Ферма о том, что ему удалось найти удивительное доказательство Ф. б. т., которое он не приводит из-за недостатка места (это замечание написано было П. Ферма на полях книги Диофанта), до сих пор Ф. б. т. в общем виде не доказана (и не опровергнута). Ф. б. т. удалось доказать для отдельных показателей и групп показателей, например для всех  $n < 4002$ . Широкая известность Ф. б. т. и нездоровый ажиотаж к поискам ее доказательства возникли в 1907 г. в связи с объявлением премии в 100 тысяч немецких марок за ее решение. Эта премия из-за ряда инфляций в Германии давно аннулирована. Однако Ф. б. т. и в настоящее время представляет значительный интерес, так как ее решение потребует, по-видимому, создания новых глубоких методов в теории алгебраических чисел.

Лит.: [13].

**ФЕРМА ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА** — см. *Ферма большая теорема*.

**ФЕРМА МАЛАЯ ТЕОРЕМА** — частный случай *Эйлера теоремы*, когда модуль  $m = p$  — простое число. Ф. м. т. формулируется так: если  $p$  — простое число, то  $a^p \equiv a \pmod{p}$ . В том случае, когда  $a$  не делится на  $p$ , из Ф. м. т. следует:  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Ф. м. т. была открыта французским ученым Пьером Ферма. Получила название малой в отличие от другого высказанного Ферма утверждения, называемого *большой теоремой Ферма*.

**ФЕРМА ТОЧКА** — то же самое, что и *Торричелли точка*.

**ФИБОНАЧЧИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ** (ряд) — последовательность чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., составленная по рекуррентному закону  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ , где каждый последующий член последовательности равен сумме двух предыдущих. Ф. п. была введена итальянским математиком Фибоначчи (ок. 1170—1250) в связи с задачей о размножении кроликов. Ф. п. является частным случаем *возвратных последовательностей*. Существует формула, явно выражающая  $n$ -й член Ф. п. через число  $n$ .

Самого Леонардо Фибоначчи часто называют Леонардо Пизанским, т. е. Леонардо из Пизы. Известна его «Книга абака» (1202), в которой «абак» понимался в смысле «арифметика».

Лит.: [14, 81].

**ФИБОНАЧЧИ ЧИСЛА.** В 1225 г. в г. Пизе в присутствии римского императора на одном из турниров была задана задача знаменитому в то время математику Фибоначчи: найти полный квадрат, остающийся полным квадратом как после увеличения, так и после уменьшения его на 5.

После некоторого размышления Фибоначчи нашел ответ задачи:

$$(41/12)^2 - 5 = (31/12)^2; (41/12)^2 + 5 = (49/12)^2.$$

Если записать эту задачу в общем виде, то получим три числа:

$$(x/y)^2 - z; (x/y)^2; (x/y)^2 + z,$$

являющиеся точными квадратами и последовательными членами арифметической прогрессии с разностью  $z$ , которые и называются Ф. ч. Некоторые авторы название Ф. ч. относят также к членам *последовательности Фибоначчи*.

**ФИГУРА ВРАЩЕНИЯ** — *поверхность вращения* или *тело вращения*.

**ФИГУРА** геометрическая — всякое множество точек, конечное или бесконечное, на плоскости или в пространстве. П р и м е р ы Ф.: точка, две точки, отрезок, луч (полупрямая), прямая, треугольник, тетраэдр, окружность, пространство и т. д.

**ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА** или  $k$ -угольные числа — целые числа вида

$$n + (k - 2) \frac{n(n - 1)}{2}, \quad n \in N.$$

Ф. ч. образуют *арифметический ряд* 2-го порядка. При  $k = 3, 4$  и 5 Ф. ч. образуют соответственно треугольные, квадратные и *пентагональные* числа. Пространственные аналоги треугольных чисел в трехмерном пространстве называются пирамидальными или *тетраэдрическими* числами.

См. также: *Многоугольные числа, Паскаля треугольник*.

**ФЛЮЕНТА** — устаревший термин, введенный И. Ньютоном для выражения переменной величины, зависящей от времени.

См. также: *Флюксия, Флюксий исчисление*.

Лат. flue — течь, *флюента* — текущая.

**ФЛЮКСИЙ ИСЧИСЛЕНИЕ** (теория флюксий) — наиболее ранняя форма анализа бесконечно малых величин и дифференциального и интегрального исчисления. Ф. и. было создано И. Ньютоном и развивалось в работах английских математиков. Символика Ньютона в Ф. и. была неудобна и была вытеснена символикой дифференциального исчисления, введенной Лейбницем и сохранившейся до настоящего времени. Переменные величины  $x, y, z, \dots$ , зависящие от времени, Ньютон называл флюентами, скорости изменения (течения) их он называл *флюксиями* и обозначал  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots$  (первые флюксии),  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \dots$  (вторые флюксии) и т. д. Следовательно, флюксии — это производные флюент по времени. Бесконечно малые изменения флюент Ньютон называл моментами и обозначал символом  $\bigcirc$  (что соответствует дифференциалу флюенты). Момент времени Ньютон обозначал через  $\bigcirc$ , момент флюенты  $y$  — через  $\bigcirc y$ . Иногда вводились специальные символы флюент:  $'y$  или  $\square y$  (символ квадратуры).

В теории флюксий ставились две основные задачи: 1) определить скорость движения в данный момент времени по заданному пути (задача дифференцирования неявной функции); 2) по заданной скорости движения определить пройденный за данное время путь (задача интегрального исчисления).

**ФЛЮКСИЯ** — устаревшее название производной функции  $dy/dx$ , введенное Ньютоном и обозначаемое символом  $\dot{y}$  (первая флюксия),  $\ddot{y}$  (вторая флюксия) и т. д. Символ  $\Phi$ . сохранился еще, например, в механике и в векторном анализе.

См. также: *Флюента* и *Флюксий исчисление*.

**ФОКАЛЬНЫЙ РАДИУС** кривой 2-го порядка — отрезок (или его длина), соединяющий *фокус* кривой 2-го порядка или один из фокусов с произвольной точкой этой кривой.

**ФОКУС**: 1<sup>0</sup>.  $\Phi$ . кривой 2-го порядка — точка, лежащая в плоскости этой кривой и обладающая тем свойством, что отношение расстояний любой точки кривой до фокуса и до соответствующей директрисы есть постоянная величина, равная эксцентриситету этой кривой (см. *Гипербола*, *Парабола*, *Эллипс*).

См. также: *Овалы*, *Декартов овал*.

Термин  $\Phi$ . был введен Кеплером в 1609 г.

2<sup>0</sup>.  $\Phi$ . в теории дифференциальных уравнений — один из типов особых точек дифференциальных уравнений: все интегральные кривые вблизи такой точки представляют собой спирали с бесконечным числом витков, наворачивающиеся на фокус. См. *Особая точка*.

Лат. focus — очаг, огонь.

**ФОРМА** степени  $m$  — многочлен от нескольких неизвестных, каждый член которого имеет степень  $m$  относительно совокупности всех неизвестных.

Лат. forma — вид, наружность.

**ФОРМАЛИЗМ** — программа Д. Гильберта обоснования математики.

**ФОРМУЛА** — всякая символическая запись (в виде выражения, равенства или неравенства), содержащая какую-либо информацию.

Лат. formula — уменьшительное от forma — образ, вид.

См. также: *Грина  $\Phi$ .*, *Стирлинга  $\Phi$ .*, *Тейлора  $\Phi$ .*, *Эйлера  $\Phi$ .*, *Теоремы сложения*.

**ФОРМЫ** геометрические (в проективной геометрии): 1<sup>0</sup>.  $\Phi$ . 1-й степени (основные):

а) прямолинейный ряд точек — множество точек  $A, B, C, \dots$ , принадлежащих данной прямой  $s$ ; прямая  $s$  называется носителем ряда точек;

б) пучок прямых — множество прямых  $a, b, c, \dots$  на плоскости, проходящих через данную точку  $s$ ; точка  $s$  называется носителем или центром пучка;

в) пучок плоскостей — множество плоскостей  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , проходящих через данную прямую  $s$ ; прямую  $s$  называют носителем пучка плоскостей или осью пучка плоскостей. Каждая из  $\Phi$ . 1-й степени с помощью проектирования или сечения может быть приведена во взаимно-однозначное соответствие с любой другой  $\Phi$ . 1-й степени.

2<sup>0</sup>.  $\Phi$ . 2-й степени (основные):

а) плоское поле точек — множество точек, принадлежащих данной плоскости  $\alpha$ ; плоскость  $\alpha$  при этом называется носителем поля;

б) плоское поле прямых — множество прямых, лежащих на данной плоскости  $\alpha$ ; плоскость  $\alpha$  при этом называется носителем поля;

в) связка прямых — множество прямых пространства, проходящих через данную точку  $S$ ; точка  $S$  при этом называется носителем или центром связки.

3°. Иногда рассматриваются Ф. 3-й ступени: пространство точек — множество точек проективного пространства, которое называется носителем точек; пространство плоскостей — множество плоскостей проективного пространства, которое называется носителем плоскостей.

Ф. 1-й, 2-й и 3-й ступени также называют соответственно образами 1-й, 2-й и 3-й ступени.

См. также: *Проективная геометрия, Проективное пространство, Квадратичная форма.*

**ФРОНТАЛЬ** — прямая  $a$ , параллельная вертикальной плоскости проекций  $v$ , но не перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций  $H$ . На *эпюре* горизонтальная проекция  $a_1$  Ф. (прямой  $a$  ( $a_1, a_2$ )) будет параллельна оси проекций  $x$ , а вертикальная проекция  $a_2$  может занимать любое положение относительно оси проекций  $x$ , но не может быть перпендикулярна ей (рис. 126). Термин Ф. употребляется в *начертательной геометрии*.

См. также: *Горизонталь.*

**ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ** действительных чисел (точек  $n$ -мерного или метрического пространства) — последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , удовлетворяющая *Кوشي критерию*, т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что для любого  $n > N$  и любого  $p \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство:  $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$  (соответственно неравенство  $\rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$ , где символом  $\rho$  обозначено расстояние в  $n$ -мерном или метрическом пространстве.) Для того чтобы последовательность имела конечный предел (соответственно единственную предельную точку), необходимо и достаточно, чтобы она являлась Ф. п. (критерий Коши сходимости последовательности).

Метрическое пространство называется полным; если любая Ф. п. его точек сходится к некоторой точке этого пространства.

Другое название Ф. п. — последовательность, сходящаяся в себе.

Лит.: [87].

**ФУНКЦИЙ ТЕОРИЯ** — раздел математического анализа, изучающий общие свойства функций. Обычно под Ф. т. понимают теорию функций действительного переменного. Относительно теории функций комплексного переменного см. термин *Аналитическая функция*. Теория функций действительного переменного подразделяется на три основных направления: 1) дескриптивная теория функций, 2) конструктивная теория функций, 3) метрическая теория функций.

Метрическая теория функций оперирует понятиями меры множества, измеримой функции, различными обобщениями понятия интеграла (см. *Лебега интеграл*), сходимости и т. п. В основе этой теории лежат методы и идеи теории множеств.

Развитие теории функции действительной переменной во многом было обу-

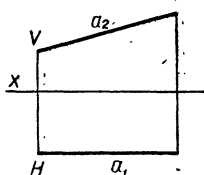


Рис. 126



словлено вопросами практики. Так, часто замечалось, что решения дифференциальных уравнений оказывались функциями разрывными или с разрывными производными (здесь: решения в некотором обобщенном смысле).

Крупные результаты Ф. т. получены Э. Борелем, Р. Бэром, А. Лебегом, а также советскими математиками Д. Ф. Егоровым, Н. Н. Лузиным, А. Я. Хинчиным, Д. Е. Меньшовым, А. Н. Колмогоровым.

Лит.: [53].

**ФУНКЦИОНАЛ.** Если каждой функции  $\varphi$  из некоторой совокупности функций  $S$  ставится в соответствие некоторое число  $F(\varphi)$ , то говорят, что задан Ф.  $F$ . Говоря нестрого,  $\Phi$  есть функция от функции, при этом совокупность  $S$  функций называется областью определения  $\Phi$ . Например,  $F(\varphi) = \varphi^2(0)$ ,  $F(\varphi) = \int_0^1 \varphi^2(x) dx$  являются Ф.

Особое значение в математике имеют так называемые линейные Ф. Если  $F(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 F(\varphi_1) + a_2 F(\varphi_2)$  для любых чисел  $a_1$  и  $a_2$  и произвольных функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  из совокупности  $S$ , то Ф.  $F$  называется л и н е й н ы м. Область определения линейного Ф. есть обязательно линейное пространство.

Примеры:  $\Phi: F(\varphi) = \varphi(0)$ ,  $F(\varphi) = \left. \frac{d^k \varphi}{dx^k} \right|_{x=0}$ ,  $F(\varphi) = \int_0^1 P(x) \varphi(x) dx$ , где  $P(x)$  — заданная функция, являются линейными Ф.

Линейные Ф. называются иначе обобщенными функциями. Существует обширная глубокая теория, касающаяся обобщенных функций.

Лит.: [53].

**ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ** — последовательность, члены которой являются функциями  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , ...,  $f_n(x)$ , ...

**ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО** — топологическое пространство, элементами (точками) которого являются функции; в частности, Ф. п. являются метрические Ф. п. Большое значение в математике имеют линейные Ф. п., метрика которых определяется с помощью *нормы*. Например,  $C(a, b)$  — пространство непрерывных на отрезке  $[a; b]$  функций с метрикой  $\rho(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$ , пространство непрерывных финитных функций (т. е. функций, обращающихся в нуль вне некоторого интервала) с метрикой

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (f - g)^2 dx} \text{ и т. д.}$$

Ф. п. часто рассматривается в функциональном анализе, операторном исчислении и т. д.

Лит.: [53].

**ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ** — уравнение, в котором неизвестным является функция, определенным образом связанная с известными (данными) функциями при помощи операции образования сложной функции. Обычно указывается класс функций, среди которого ищется неизвестная функция (класс непрерывных, класс разрывных или класс измеримых функций).

Так, определение четной, нечетной, периодической функции производится с помощью понятия Ф. у.

Примеры. 1.  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , где функция  $f$  неизвестна. Это Ф. у. имеет общее решение  $f(x) = ax$ , если, конечно, ищется непрерывное реше-

ние; однако то же уравнение допускает и другие решения (разрывные и, более того, неизмеримые; см. *Измеримая функция*).

2. Непрерывным решением простых Ф. у.  $f(xy) = f(x) + f(y)$  и  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  являются соответственно функции  $\ln x$  и  $e^x$ .

Лит.: [95].

**ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УСТРОЙСТВО** — механизм, позволяющий определить значение функции по значению ее аргумента. Примером Ф. у. могут служить фигурные потенциометры, соединения электрических элементов, приближающие функцию кусочно-линейной зависимостью, и другие электрические устройства. См. также: *Счетно-решающие устройства*.

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ** — важный раздел современной математики. Как самостоятельная наука Ф. а. оформился на рубеже XIX и XX вв., когда обнаружилась глубокая аналогия между некоторыми понятиями алгебры, анализа и геометрии. Ф. а. объединяет и обобщает идеи различных отделов классического анализа (например, вариационное исчисление, интегральное и дифференциальное исчисление, интегральные и дифференциальные уравнения), теории множеств, линейной алгебры и многомерной геометрии.

Наиболее важным понятием Ф. а. является общее понятие пространства. Для Ф. а. характерно рассмотрение бесконечномерных пространств, состоящих из функций, последовательностей или каких-либо других общих объектов, а также операций над элементами таких пространств. Понятие  $n$ -мерного пространства необходимо было ввести уже при геометризации теории функций многих переменных. Пространства, точками которых являются функции или числовые последовательности, называются функциональными пространствами.

С развитием понятия пространства шло и обобщение понятия функции. Периодические величины, зависящие не от числового аргумента, а от некоторой функции, получили название функционалов. Функционал — числовая функция, определенная на некотором функциональном пространстве.

Было установлено, что многие свойства уравнений связаны с чисто алгебраическими соотношениями между операторами дифференцирования, интегрирования, умножения на функцию и т. д. Рассмотрение алгебраических свойств этих операторов лежит в основе операторного исчисления — одного из отделов Ф. а. Одной из важнейших идей Ф. а. является идея спектрального разложения линейного оператора.

Методы Ф. а. широко применяются как в математике, так и в современной физике и химии (например, квантовой физике и квантовой химии). Более того, сам Ф. а. и пути дальнейшего его развития в значительной мере зависят от идей и задач современной квантовой физики.

Лит.: [53].

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ** — *определитель*, элементами которого являются функции. Большую роль в математике играют следующие частные случаи Ф. о.: *Вронскиан, Гессиан, Якобиан, Грамма определитель* и т. д.

**ФУНКЦИЯ** (или функциональное соответствие) — одно из важнейших понятий математики. Пусть имеется множество  $X$  и множество  $Y$ . Соответствие  $f \subset X \times Y$ , которое каждому элементу  $x \in X$  сопоставляет единственный элемент  $y \in Y$ , называется функцией или функциональным соответствием. Тройку  $(X, f, Y)$  называют при этом *отображением* множества  $X$  в (или на) множе-

ство  $Y$  и обозначают  $f: X \rightarrow Y$ . Обозначается  $\Phi$ , обычно буквами  $f, \varphi, g$  и т. д. Множество  $X$  называется при этом областью определения  $\Phi$ . Множество  $Y$  называется множеством значений  $\Phi$ . (или областью изменения  $\Phi$ .) и обозначается  $E(f)$ . Часто множества  $X$  и  $Y$  не указывают, а подразумевают. Допустимы также обозначения  $\Phi$ :

$$x \rightarrow f(x); x \rightarrow y; f: x \rightarrow y; x/y; x \rightarrow y; y = f(x).$$

Элемент  $x$  из  $X$  называют переменной (переменным) или аргументом; элемент  $y = f(x)$  из  $Y$  называют значением  $\Phi$ , на элементе  $x$  или образом элемента  $x$  при отображении  $f$ .

Иногда область определения  $X$  функции называют областью отправления или источником, а множество значений  $Y$  (область изменения  $\Phi$ .) называют областью прибытия или целью. В зависимости от природы множеств  $X$  и  $Y$  получают различные типы  $\Phi$ . Если  $X$  и  $Y$  — некоторые множества действительных чисел, т. е.  $x$  и  $y$  принимают действительные числовые значения, то имеем  $\Phi$  действительной (вещественной) переменной. Если  $X$  — некоторое множество действительных чисел, а  $Y$  — некоторое множество комплексных чисел, то имеем комплексно-значную  $\Phi$  действительной переменной (действительного переменного). Если  $X$  и  $Y$  — некоторые множества комплексных чисел, то имеем комплексную  $\Phi$  комплексной переменной. Если  $X$  — множество упорядоченных наборов из  $n$  элементов  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  принимают числовые значения, а  $Y$  — некоторое множество действительных чисел, то имеем числовую  $\Phi$  многих переменных:  $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Чаще всего рассматривают  $\Phi$ , область значений которой есть числовое множество; если же область значений не есть числовое множество, то это обычно отмечается в названии  $\Phi$ : вектор-функция,  $\Phi$ , принимающая матричные значения. В случае, когда множество  $Y$  не является числовым множеством, употребляются термины: *оператор, функционал* и т. д.

$\Phi$  может задаваться одним или несколькими аналитическими выражениями, словесным определением (вербально), таблицей, графически, графами (стрелочное задание функции) и т. д., лишь бы был задан закон однозначного соответствия:  $x \rightarrow y = f(x)$ .

Композиция двух  $\Phi$ . (или суперпозиция, или сложная  $\Phi$ .), вообще говоря, не коммутативна, т. е.  $f \circ g$  и  $g \circ f$  будут в общем случае разными  $\Phi$ .

Принятое в старых руководствах определение  $\Phi$  как переменной величины несовершенно, поскольку при этом используется нестрогое понятие переменной величины.

Примеры и различные типы  $\Phi$  указаны в статьях: *Аналитическая функция, Элементарные функции, График функции, Непрерывная функция, Обратные тригонометрические функции, Периодическая функция, Ступенчатая функция, Целая часть, Четная функция.*

См. также: *Многозначная функция, Соответствие, Инъекция, Сюръекция, Биекция.*

**ФУНКЦИЯ ОТ ФУНКЦИИ** — то же, что *сложная функция, композиция или суперпозиция функций.*

**ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ** — см. в термине *Распределение случайной величины*.

**ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛ** абсолютно интегрируемой функции  $f(x)$  — несобственный интеграл вида

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(u-x) z du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du, \quad (*)$$

или

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iz(u-x)} dx. \quad (**)$$

Интегралы с бесконечными пределами понимаются в смысле главного значения. Пусть  $f(x)$  в точке  $x_0$  в одном случае (\*) непрерывна, а в другом случае (\*\*) имеет в этой точке разрыв первого рода. Положим в первом случае (\*)

$$S_0 = f(x_0),$$

а в другом

$$S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Тогда Ф. и. функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  сходится и имеет значение  $S_0$ , если при некотором  $h > 0$  сходится интеграл  $\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} dt$ , где  $\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0$  (признак Дини). Ф. и. функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  сходится и имеет значение  $S_0$ , если в некотором промежутке  $[x_0 - h, x_0 + h]$  с центром в этой точке функция  $f(x)$  имеет ограниченные значения (признак Дирихле — Жордана).

Ф. и. широко используются при решении различных задач математической физики и в функциональном анализе.

Ф. и. является аналогом ряда Фурье, поскольку Ф. и. представляет функцию в виде непрерывной суммы гармоник с бесконечно малыми амплитудами (ср. *Фурье преобразование*).

Лит.: [87].

**ФУРЬЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ** функции  $f(x)$  относительно ортонормированной системы функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ , заданных на отрезке  $[a; b]$ , числа  $C_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx$ . Важен частный случай Ф. к. периодической (периода  $2T$ ) функции  $f(x)$  по ортонормированной системе:

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \cos \frac{\pi n x}{T}, \quad \frac{1}{\sqrt{T}} \sin \frac{\pi n x}{T}, \quad \frac{1}{\sqrt{2T}}, \quad n \in N,$$

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T}^T f(x) \cos \frac{\pi n x}{T} dx, \quad B_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{\pi n x}{T} dx,$$

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_{-T}^T f(x) dx.$$

В этом случае для  $\Phi$ . к. более употребительно такое определение:

$$a_n = \frac{A_n}{\sqrt{T}}, \quad b_n = \frac{B_n}{\sqrt{T}}, \quad n \in N, \dots, \quad a_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}} A_0.$$

См. также: *Парсеваля равенство, Фурье метод, Фурье ряды.*

Лит.: [87].

**ФУРЬЕ МЕТОД** — метод решения различных задач, использующий разложение функций в ряды и интегралы Фурье. Такое разложение приводит к очень удобному аналитическому представлению функции, которое оказывается зачастую совершенно незаменимым при решении различных задач математики, астрономии, математической физики, теоретической физики, теоретической механики и т. д. Так, например, рассматривая распространение тепла в тонком однородном стержне длины  $l$ , решают уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

с граничными условиями  $u(0, t) = u(l, t) = 0$  и начальными условиями  $u(x, 0) = f(x)$ , представляя  $u$  в виде  $u(x, t) = \sum_1^\infty A_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}$ , где  $A_n$  определяются из начальных и граничных условий.

Лит.: [82].

**ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ** функции  $f(x)$  — функция  $F(z)$ , связанная с  $f(x)$  формулой

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-izu} du.$$

При этом предполагается, что формула Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du$$

имеет место для всех значений  $x$  в промежутке  $]-\infty; +\infty[$ , за исключением, быть может, лишь конечного числа точек.

Обратное Ф. п. выражается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{ixz} dz.$$

Функции

$$F_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(u) \cos zu du, \quad F_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(u) \sin zu du$$

называются соответственно косинус- и синус-преобразованием Фурье.

Если функция  $f(x)$  четная, то  $F(z) = F_c(z)$ ; если же функция  $f(x)$  нечетная, то  $F(z) = iF_s(z)$ . В общем случае  $f(x)$  можно представить в виде суммы четной  $g(x)$  и нечетной  $h(x)$  функций:

$$g = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)], \quad h = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f = g + h.$$

Тогда  $F(z) = G_c(z) + iH_s(z)$ , поэтому можно ограничиться косинус- и синус-преобразованиями Фурье. Например, для  $f(x) = e^{-ax}$ .

$$F_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + z^2}, \quad F_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z}{a^2 + z^2}, \quad \text{а для } f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & a > 0, x > a \end{cases}$$

$$F_c = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin az}{z}, \quad F_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos az}{z}.$$

Если  $f(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $]-\infty; +\infty[$ , то функция  $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-izu} du$  непрерывна во всем этом промежутке и стремится к нулю

при  $z \rightarrow \pm \infty$ . Если же абсолютно интегрируема в промежутке  $]-\infty; +\infty[$   $f(x)x^n$  ( $n$  — натуральное число), то  $F(z)$  имеет  $n$  производных  $F'(z)$ ,  $F''(z)$ , ...,  $F^{(n)}(z)$ , которые при  $z \rightarrow \pm \infty$  все стремятся к нулю.

Понятие Ф. п. можно обобщить на случай функции многих переменных. В частности, если  $f(x_1, x_2)$  абсолютно интегрируема по обоим переменным  $x_1, x_2$  в промежутке  $]-\infty; +\infty[$ , то ее Ф. п. имеет вид:

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2) e^{-i(z_1 u_1 + z_2 u_2)} du_2,$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F(z_1, z_2) e^{i(z_1 x_1 + z_2 x_2)} dz_2.$$

Ф. п. применяется в функциональном анализе, гармоническом анализе, операционном исчислении, в теории линейных систем и др.

Лит.: [53, 82].

**ФУРЬЕ РЯД** функции  $f$  относительно ортонормированной системы функций  $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_k(x), \dots$  — ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} C_k \Phi_k(x)$ , где  $C_k$  — коэффициенты Фурье (см. *Фурье коэффициенты*). Часто рассматривается важный частный случай Ф. р. периодической функции  $f(x)$  (периода  $2T$ ) относительно ортонормированной системы:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2T}}, \quad \frac{1}{\sqrt{T}} \cos \frac{\pi n x}{T}, \quad \frac{1}{\sqrt{T}} \sin \frac{\pi n x}{T}, \quad n \in N, \\ & A_0 \frac{1}{\sqrt{2T}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{\sqrt{T}} \cos \frac{\pi n x}{T} + B_n \frac{1}{\sqrt{T}} \sin \frac{\pi n x}{T} = \\ & = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{\pi n x}{T}. \end{aligned}$$

Если  $f(x)$  обладает непрерывной производной, то этот Ф. р. сходится к функции  $f(x)$ .

Ф. р. является мощным средством уравнений математической физики и гармонического анализа. Введен Ж. Фурье в связи с задачами о распространении тепла.

Лит.: [50, 82, 87].



**ХАЙЯМА — САККЕРИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК** — четырехугольник с двумя прямыми углами при основании и конгруэнтными боковыми сторонами. Х. — С. ч. сыграл большую роль в истории создания геометрии Лобачевского. Доказывается, что два других угла у такого четырехугольника конгруэнтны. Относительно величины этих углов возможны три гипотезы: гипотеза прямого, острого и тупого углов. Саккери (1667—1733) исследовал все три предположения. Впервые такой четырехугольник рассматривал среднеазиатский математик Омар Хайям (1048—1131). Лит.: [62].

**ХАРАКТЕРИСТИКА:** 1°. Х. десятичного логарифма данного числа — целая часть логарифма этого числа.

2°. Х. в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Для дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$p \frac{\partial z}{\partial x} + q \frac{\partial z}{\partial y} = r, \quad (*)$$

где  $p, q, r$  — данные функции от  $x, y, z$ . Х. называют кривые, определяемые системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{r}.$$

Интегрируя, получаем семейство Х.:

$$\varphi(x, y, z) = C_1, \psi(x, y, z) = C_2, (C_1, C_2 = \text{const}) —$$

совокупность кривых, касающихся в каждой своей точке вектора  $(p, q, r)$ .

Интегральная поверхность уравнения (\*) является геометрическим местом Х., пересекающих некоторую кривую. Уравнение поверхности  $F[\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)] = 0$ , где  $F$  — функция двух переменных.

Условие — кривая не является Х. — необходимое и достаточное для того, чтобы задача Коши с условиями, заданными на этой кривой, имела единственное решение.

Понятие Х. обобщается для случая трех и более независимых переменных. Для дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (**)$$

$X$ . определяются как линии, вдоль которых удовлетворяется обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a dy^2 - 2b dx dy + c dx^2 = 0. \quad (***)$$

Понятие  $X$ . для этого случая было введено французским ученым Г. Монжем.

В случае, когда уравнение (\*\*\*) гиперболического типа, получаются два семейства  $X$ . с уравнениями:

$$\xi(x, y) = C_1, \quad \eta(x, y) = C_2.$$

$C_1$  и  $C_2$  — произвольные константы. Если взять  $\xi$  и  $\eta$  за новые аргументы, то уравнение (\*\*\*) приводится к виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Для уравнения параболического типа эти семейства совпадают, и если выбрать должным образом  $\eta$ , то уравнение (\*\*) приводится к виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Если уравнение (\*\*) эллиптического типа, то вещественных  $X$ . нет.

Записывая решение уравнения (\*\*\*) в виде  $\xi \pm i\eta = C$ , преобразуем уравнение (\*\*):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Зная значения решения вдоль  $X$ . и значения  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$  в некоторой точке  $X$ ., можно определить значения этих производных вдоль всей линии (см. *Краевые задачи*). Такой зависимости нет для других линий. Однако если значения  $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ , заданные на линии, не являющейся  $X$ ., определяют значения решения вблизи этой линии, то для  $X$ . это не так.

Если два решения совпадают по одну сторону линии и различны по другую, то эта линия является  $X$ .

Определения  $X$ . имеются также для уравнения и систем уравнений с частными производными любого порядка.

3°.  $X$ . в дифференциальной геометрии — кривая, вдоль которой огибающая семейства поверхностей касается данной поверхности семейства.  $X$ . семейства плоскостей можно получить как предельное положение прямой пересечения плоскости семейства с бесконечно близкой плоскостью семейства.

4°.  $X$ . Эйлера — Пуанкаре — см. *Эйлера теорема*.

5°.  $X$ . в теории вероятностей. Числовые  $X$ . — числовые параметры, до некоторой степени характеризующие существенные черты распределения случайной величины. Назначение таких  $X$ . — в сжатой форме выразить наиболее существенные особенности распределения, например: какое-то среднее значение, около которого группируются возможные значения случайной величины; какое-либо число, характеризующее степень разбросанности этих значений относительно среднего, и т. д.

Лит.: [82].



**6°.** **Х. поля (тела).** Если в поле (теле)  $P$  равенство  $pe = 0$  (где  $e$  — единица поля  $P$ , а  $n$  — целое неотрицательное число, указывающее, что  $e$  взято  $n$  раз) возможно лишь при  $n = 0$ , то поле (тело)  $P$  называется полем (телом) характеристики нуль. Например, все числовые поля имеют характеристику 0. Иногда поля характеристики 0 называют полями без характеристики или полями  $X$ . ( $+\infty$ ).

Если же равенство  $pe = 0$  выполняется и при некоторых положительных  $n$ , то наименьшее из этих чисел называется  $X$ . п.  $X$ . п. могут быть лишь *простые числа*  $p$  и число 0. Поля (тела) ненулевой характеристики называются полями (телами) конечной характеристики.

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА** квадратной матрицы  $A$  — матрица  $A - \lambda E$ , где  $E$  — единичная матрица, а  $\lambda$  — некоторое неизвестное. Таким образом, если

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

то ее  $X$ . м. равна:

$$A - \lambda E = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ТОЧКА** кривой семейства — предельное положение точки пересечения данной кривой семейства с бесконечно близкой кривой семейства.

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ:** 1°. **Х. ф. множества точек** — функция, равная единице в точках множества и нулю в точках, не принадлежащих рассматриваемому множеству. Например, *Дирихле функция* есть  $X$ . ф. множества рациональных чисел.

2°. **Х. ф. случайной величины**  $\xi$  определяется равенством  $f(t) = M(e^{it\xi})$ , где  $M$  — знак математического ожидания. Если  $\varphi(x)$  — плотность *распределения* случайной величины  $\xi$ , то  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(x) dx$ .  $X$ . ф. случайной величины

применяется при доказательстве предельных теорем. Их применение основано на том факте, что  $X$ . ф. суммы независимых случайных величин равна произведению  $X$ . ф. слагаемых.

Другие свойства  $X$ . ф.: 1)  $X$ . ф. однозначно определяют распределение случайной величины; 2)  $f'(0) = iM(\xi)$ .

**Пример**  $X$ . ф. случайной величины, имеющей нормальное распределение с параметрами 0 и 1, если плотность распределения равна  $(1/\sqrt{2\pi}) \exp(-t^2/2)$ , дается формулой  $f(t) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-t^2/2)$ .

Лит.: [26].

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОРНИ** квадратной матрицы  $A$  — корни ее *характеристического многочлена* или ее *характеристического уравнения*,

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА** — то же, что и *собственные значения* или *собственные числа*.

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН** *квадратной матрицы*  $A$  — определитель *характеристической матрицы* для матрицы  $A$ , т. е.  $|A - \lambda E|$ . Он, очевидно, является многочленом  $n$ -й степени относительно  $\lambda$ .

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ** *квадратной матрицы*  $A$  — ее *характеристический многочлен*, приравненный нулю, т. е.  $|A - \lambda E| = 0$ . Если в  $X$ . у. матрицы  $A$  подставить вместо  $\lambda$  матрицу  $A$  и выполнить (матричные) операции, то получим *нулевую матрицу*, т. е. матрица  $A$  является матричным корнем своего  $X$ . у.  $X$ . у. иначе называется *вековым уравнением*.

**ХАРАКТЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ**  $A(g)$  группы  $G$  являются следами матриц  $A(g)$ , т. е. функциями элементов группы, определенных равенством  $\chi(g) = \sum_{i=1}^n A(g)_{ii}$ . У всех эквивалентных представлений  $X$ . п. одинаковые.

Необходимым и достаточным условием эквивалентности двух представлений является совпадение всех их  $X$ . п. (см. *Группа, Теория групп*).

Лит.: [37].

**ХАУСДОРФОВО ПРОСТРАНСТВО** — топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме отделимости Хаусдорфа: для любых различных точек  $x$  и  $y$  пространства существуют окрестности  $u$  и  $v$  точек  $x$  и  $y$  соответственно такие, что  $u \cap v = \emptyset$ . Другое название  $X$ . п. —  $T_2$ -пространство.

Лит.: [4].

**ХОРДА** окружности — отрезок, соединяющий любые две точки окружности.  $X$ ., проходящая через центр окружности, называется *диаметром*.  $X$ . окружности также называется хордой соответствующего круга.

Греч. *χορδή* — струна, тетива (лука), кишка, жила.



**ЦЕЛАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ** — функция вида

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

где  $x$  — независимая переменная,  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  — постоянные. В частности, *квадратный трехчлен*  $y = ax^2 + bx + c$  является Ц. р. ф. Если Ц. р. ф. имеет степень  $n$ , то она содержит не более  $n - 1$  экстремумов и не более  $n - 2$  точек перегиба.

**ЦЕЛАЯ ФУНКЦИЯ** — функция  $f(z)$ , являющаяся аналитической по всей плоскости комплексного переменного. Такими, например, являются функции:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad f(z) = \sin z, \quad f(z) = e^z.$$

Для того чтобы  $f(z)$  была Ц. ф., необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одной точки  $z_0$  имело место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|} = 0.$$

В этом случае ряд Тейлора для  $f(z)$

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \dots$$

будет сходиться во всей плоскости комплексного переменного.

Ц. ф.  $f(z)$  называется трансцендентной, если точка  $z = \infty$  является существенно *особой точкой*. Например,  $f(z) = \cos z$ ,  $f(z) = e^z$ .

Лит.: [56].

**ЦЕЛАЯ ЧАСТЬ** действительного числа  $x$  — наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ . Ц. ч. числа  $x$  обозначается символом  $[x]$  или (реже) символом  $E(x)$ . Читается: «целая часть  $x$ », или «целая часть от  $x$ », или «антье  $x$ » (или «антье от  $x$ »). Последнее название происходит от французского слова *entiere* — целый. Ц. ч. числа  $x$  удовлетворяет двойному неравенству

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Функция  $y = [x]$  используется в различных вопросах теории чисел, математического анализа, теории рекурсивных функций и в других вопросах математи-

ки. График функции  $y = [x]$  представляет собой множество параллельных отрезков единичной длины, у которых удалены правые концы (рис. 127).

Примеры. 1)  $[\sqrt{\pi}] = 1$ ; 2)  $[1/3] = 0$ ; 3)  $[-\pi] = -4$ ; 4)  $[\ln 2,8] = 1$ .

Ц. ч. числа  $x$  связана с дробной частью того же числа  $x$  соотношением  $x = [x] + \{x\}$ .

**ЦЕЛОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ЧИСЛО** — корень многочлена с целочисленными коэффициентами и с коэффициентом при старшем члене, равным единице. Например,  $\sqrt[5]{9}$  — Ц. а. ч., так как оно является корнем многочлена  $x^5 - 9$  с целыми коэффициентами. Множество всех Ц. а. ч. составляет *кольцо*. Это кольцо является *подкольцом* в поле алгебраических чисел.

**ЦЕЛОЕ КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО** — комплексное число  $a + bi$  с целыми  $a$  и  $b$ , т. е.  $a \in \mathbb{Z}$  и  $b \in \mathbb{Z}$ .

**ЦЕЛОСТНОСТИ КОЛЬЦО** — ассоциативно-коммутативное кольцо без делителей нуля, т. е. такое, что в нем из равенства  $ab = 0$  следует, что по крайней мере один из сомножителей равен нулю. Всякое поле и тело есть Ц. к. Кольцо многочленов тоже Ц. к. С другой стороны, кольцо матриц второго порядка относительно операций матричного сложения и умножения не есть Ц. к. Действительно, пусть

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ тогда } ab = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е.  $ab = 0$ , хотя  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ .

Ц. к. называют также областью целостности.

**ЦЕЛОСТНОСТИ ОБЛАСТЬ** — то же, что *целостности кольцо*.

**ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ ФУНКЦИЯ** — функция, область определения которой есть совокупность натуральных чисел. О значениях Ц. ф. говорят, что они образуют последовательность. Например,  $f(x) = x!$  Ц. ф. Ее значения  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$ ,  $f(3) = 6$ , ... образуют последовательность.  $f(x) = 2^{-x}$  — Ц. ф. при  $x \in \mathbb{N}$ . Значения  $f(1) = 1/2$ ,  $f(2) = 1/4$ ,  $f(3) = 1/8$ , ... образуют последовательность (геометрическая прогрессия).

**ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА** — числа, принадлежащие объединению множеств: множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным, и множества, состоящего из одного числа нуль. Множество целых чисел обозначается символом  $\mathbb{Z}$ . Итак, множество Ц. ч.:

$$\mathbb{Z} = \{..., -2; -1; 0; 1; 2; ...\}.$$

Иначе, Ц. ч. — числа вида  $\pm n$ , где  $n$  — натуральное число или нуль. Множество Ц. ч. образуют *кольцо*.

См. также: Пеано аксиомы, Рациональные числа, Действительные числа, Комплексные числа, Кватернионы.

**ЦЕНТР**; 1°. Ц. гомотопии в проективной геометрии — см. Гомотопия.

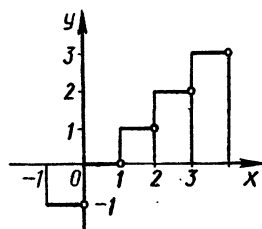


Рис. 127

2°. **Ц. гомотетии евклидовой плоскости** — точка, переходящая в себя в преобразовании гомотетии, если коэффициент гомотетии  $k \neq 1$  ( $k \neq 0$ ).

3°. **Ц. группы** — множество элементов  $Z$  группы  $G$  таких, что  $zg = gz$  для любых  $z \in Z$  и  $g \in G$ .

Ц. г. является *абелевой группой*, а также *нормальным делителем* группы  $G$ . Например, в группе всех невырожденных матриц скалярные матрицы (т. е. матрицы вида  $\lambda E$ ,  $\lambda$  — произвольное число,  $E$  — единичная матрица) образуют Ц. г.

4°. **Ц. симметрии** — центр *поворота плоскости* (вокруг точки) при угле поворота  $\varphi = 180^\circ$ . Аналогично определяется Ц. симметрии любой другой геометрической фигуры: Ц. с. фигуры — точка плоскости, при повороте вокруг которой фигура совпадает сама с собой (самосовмещается). Фигуры, имеющие Ц. с., называются *центральными*; так, *центральными фигурами* являются: *Эллипс*, *Гипербола*, *Эллипсоид*, *Однополостный гиперболоид* и *Двуполостный гиперболоид*, *Параллелограмм* и др. Любое конечное число  $n$  ( $n \geq 2$ ) Ц. с. фигура иметь не может, однако она может иметь бесконечное число Ц. с. — целую прямую или целую плоскость Ц. с. Например, круговой цилиндр (бесконечная поверхность) имеет прямую Ц. с. — ось цилиндра; параллельные плоскости имеют целую плоскость Ц. с., параллельную данным двум плоскостям и проходящую через точку, равноудаленную от данных плоскостей.

**ЦЕНТР (ОСОБАЯ ТОЧКА)** в теории дифференциальных уравнений — такая особая точка, в окрестности которой все интегральные кривые являются замкнутыми и содержат эту точку внутри себя.

Лит.: [67].

**ЦЕНТР КРИВИЗНЫ** — центр круга кривизны в данной точке кривой.

Лит.: [61, 71].

**ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ** треугольника (двумерного, треугольной пластинки) — синоним *Центроида треугольника*. Ц. т. двумерного не совпадает с Ц. т. одномерного (каркасного) треугольника.

См. также: *Треугольник*.

**ЦЕНТРАЛЬНО-ПОДОБНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ** — синоним *гомотетии*.

**ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ** — угол, вершина которого совпадает с центром данной окружности (рис. 128). Величина Ц. у.  $COD$  измеряется величиной дуги  $AB$  окружности, где  $A$  и  $B$  — точки пересечения сторон Ц. у. с окружностью, т. е. он содержит столько угловых градусов, сколько дуга  $AB$  — дуговых. Дуга  $AB$  называется дугой, на которую опирается Ц. у. Ц. у., длина дуги которого (на которую он опирается) равна радиусу  $OA$ , называется *радианом*.

**ЦЕНТРО-АФФИННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ** — аффинное преобразование, имеющее по крайней мере одну двойную точку (см. *Двойной элемент*). Частным случаем Ц.-а. п. является гомотетия.

**ЦЕНТРОИД** треугольника (двумерного) — точка пересечения его *медиан*. Ц. т. иначе называется *центром тяжести* этого треугольника (двумерного, треугольной пластинки) или *центром масс*.

См. также: *Треугольник*.

**ЦЕПНАЯ ДРОБЬ** — синоним *непрерывной дроби*.

**ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ** — плоская кривая, определяемая

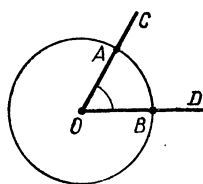


Рис. 128

мая уравнением

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left[ e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right].$$

Форму этой кривой принимает цепь или какая-нибудь другая однородная гибкая и нерастяжимая тяжелая нить, у которой концы закреплены в двух точках и расстояние между этими точками меньше длины нити. При небольшом провисании Ц. л. для ее приближенного расчета можно пользоваться уравнением параболы:

$$y = a \left( 1 + \frac{x^2}{2a^2} \right).$$

Радиус кривизны Ц. л.:

$$R = \frac{y^2}{a} = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}.$$

Длина дуги Ц. л., отсчитываемая от точки  $x = 0$ :

$$l = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left[ e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right].$$

Если дугу Ц. л. вращать вокруг оси  $Ox$ , то получаемая поверхность называется *катеноидом*.

Лит.: [74].

**ЦЕРМЕЛО АКСИОМА**, или принцип выбора, утверждает, что для любой системы непустых множеств существует функция, сопоставляющая каждому множеству один его элемент. Иначе говоря, Ц. а. утверждает, что из каждого множества произвольной системы непустых множеств можно сразу выбрать по одному элементу. Ц. а. была высказана Цермело (1904). На нее опирался Цермело в доказательстве теоремы о возможности всякое множество сделать *вполне упорядоченным множеством*. Ц. а. вызвала много споров среди математиков, и ряд математиков не признали ее, а следовательно, не считают установленной и теорему о возможности вполне упорядочивать произвольные множества. Но оказалось, что на Ц. а. опирается доказательство многих теорем классического математического анализа. В настоящее время чаще пользуются эквивалентным Ц. а., но более удобным в приложениях принципом Цорна максимального элемента.

**ЦИКЛИЧЕСКАЯ ГРУППА** — группа, содержащая элемент  $a$  такой, что всякий ее элемент  $g$  равен  $a^k$  при некотором показателе  $k \in \mathbb{Z}$ . Например: группа комплексных корней  $n$ -й степени из единицы, аддитивная группа целых чисел и др.

**ЦИКЛИЧЕСКАЯ ПОДСТАНОВКА** (или цикл) — подстановка такая, что любой действительно перемещаемый ею символ может быть переведен в любой другой из этих символов некоторой степенью этой подстановки, т. е. некоторым ее повторным применением.

Пример. 
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, перемещаемые символы здесь 1, 3, 5. Подстановками  $S, S^2, S^3$  любой из этих трех символов может быть переведен в любой другой из них. Для

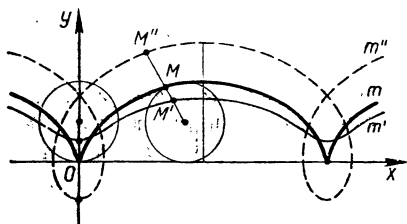


Рис. 129

точка  $M$  расположена на окружности, то получим  $m$  — обычную Ц., если внутри (на рис. 129 точка  $M'$ ), то укороченную Ц.  $m'$ , если вне окружности (на рис. 129 точка  $M''$ ), то удлинённую Ц.  $m''$ .

Ц. находит себе применение в технике (в зубчатом зацеплении, при котором профили зубьев имеют очертания циклоидальных кривых) и теории механизмов.

Параметрические уравнения Ц. такие:  $x = r \left( t - \frac{a}{r} \sin t \right)$ ,  $y = r \left( 1 - \frac{a}{r} \cos t \right)$ ,

где  $r$  — радиус подвижного круга,  $a$  — расстояние точки  $M$  до центра круга,  $t$  — параметр, угол, на который повернулся круг (или его радиус) при своем качении по прямой.

Греч. — *κυκλωειδός* — кругообразный, от *κυκλός* — круг, *ειδός* — вид.

Лит.: [74].

**ЦИЛИНДР:** 1°. Ц. в аналитической геометрии — то же самое, что и цилиндрическая поверхность.

2°. Ц. в элементарной геометрии — тело (фигура), полученное пересечением цилиндрической поверхности, имеющей замкнутую, несамопересекающуюся плоскую направляющую  $\omega$ , двумя параллельными плоскостями (рис. 130)  $\alpha$  и  $\beta$ . Плоские фигуры  $\omega$  и  $\omega'$  называются основаниями Ц:  $\omega$  — нижним,  $\omega'$  — верхним. Если при этом сечение Ц. есть окружность, то Ц. называется **к р у г о в ы м**; если при этом образующая  $l$  перпендикулярна плоскости сечения  $\omega$ , то Ц. называется **п р я м ы м к р у г о в ы м**. Обычно только прямой круговой Ц. и называют Ц. Ц. — тело, полученное от вращения прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону. Плоское сечение прямого кругового Ц. наклонной плоскостью есть **эллипс** (ср. *Конус*).

**ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ** — поверхность, образованная движением прямой  $l$ , перемещающейся параллельно самой себе и пересекающей некоторую заданную плоскую кривую  $\omega$  (направляющую Ц. п.). Прямая  $l$  при этом называется **образующей Ц. п.** Если образующая Ц. п. есть эллипс, парабола или гипербола, то Ц. п. соответственно называется **эллиптической**, **параболической** или **гиперболической**. В аналитической геометрии Ц. п. называется также **цилиндром**.

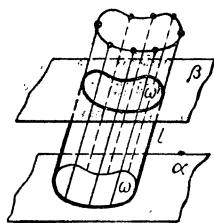


Рис. 130

**ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ**  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  точки  $M$  трехмерного евклидова пространства — такие координаты

наты, для которых координатная поверхность (см. Координаты)  $r = \text{const}$  является цилиндром с образующими, параллельными оси  $Oz$  (рис. 131). Ц. к. связаны с декартовыми  $x, y, z$  соотношениями:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

Якобиан преобразования от декартовых координат к цилиндрическим имеет вид:

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Лит.: [94].

**ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ** — решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0, \quad (*)$$

где  $\nu$  — произвольный параметр. Термин Ц. ф. обязан своим происхождением тому обстоятельству, что уравнение (\*) встречается при рассмотрении краевых задач потенциала для цилиндрической области. Некоторые классы Ц. ф. известны под названием функций Бесселя, и иногда это наименование присваивается всему классу Ц. ф.

Одно из решений уравнения (\*) имеет вид:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}.$$

Это решение называют Ц. ф. первого рода порядка  $\nu$ . Общее решение уравнения (\*) при целом запишется в виде:

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x),$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные. В случае целого  $\nu$   $J_\nu(x)$  и  $J_{-\nu}(x)$  линейно зависимы и в качестве второго частного решения берется Ц. ф. второго рода;

$$Y_\nu(x) = \lim_{\mu \rightarrow \nu} \frac{J_\mu(x) \cos \mu\pi - J_{-\mu}(x)}{\sin \mu\pi}.$$

В практических задачах часто употребляются еще Ц. ф. третьего рода (функции Ганкеля):

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x).$$

Детально изучены также Ц. ф. для мнимых и комплексных значений аргумента.

Существует большое количество таблиц Ц. ф.

**ЦИЛИНДРОИД** — тело, ограниченное цилиндрической поверхностью, перпендикулярной к ней плоскостью (называемой основанием Ц.) и поверхностью, которую каждый перпендикуляр к основанию Ц. пересекает в одной точке (рис. 132). Ц. называется также линейчатая поверхность 3-го порядка:  $(x^2 + y^2)z = kxy$ , применяемая при изучении винтовых движений твердого тела. Ц. иначе называется **цилиндрическим бруском**.

Греч. *κύλινδρος* — цилиндр, *εἶδος* — вид.

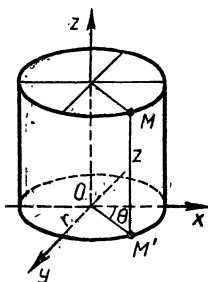


Рис. 131



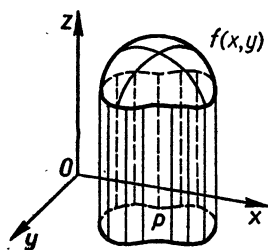


Рис. 132

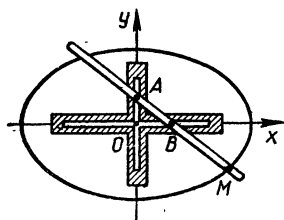


Рис. 133

**ЦИРКУЛЬ; 1<sup>о</sup>. Ц. круговой** — инструмент, предназначенный для вычерчивания окружностей. и их **дуг**. Ц. в первой русской книге по геометрии Елизарьева называется кружальником.

**2<sup>о</sup>. Ц. пропорциональный** — инструмент для уменьшения (или увеличения) отрезков в некотором отношении.

**3<sup>о</sup>. Ц. эллиптический** — инструмент для вычерчивания эллипсов (рис. 133). Если  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса, то муфту  $M$  и шарнир  $B$  следует закрепить так, чтобы  $|AM| = a$  и  $|BM| = b$ .

Лат. *circulus* — круг, окружность.

**ЦИРКУЛЯТУРА КВАДРАТА** — задача о построении циркулем и линейкой круга, равновеликого данному квадрату. Ц. к. в плоскости Евклида, как и задача о *квадратуре круга*, не разрешима.

**ЦИРКУЛЯЦИЯ** векторного поля  $\vec{F}$  вдоль замкнутой ориентированной кривой  $L$  — интеграл  $\oint_L (\vec{F}, d\vec{r})$ . В координатной форме Ц. записывается в виде

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz, \quad \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};$$

здесь  $x, y, z$  — декартовы координаты,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — координатные орты.

Ц. поля вдоль  $L$  равна работе, совершаемой силами силового поля  $F$  при перемещении тела единичной массы, заряда и т. д.

В теории поля широко применяется теорема Стокса, согласно которой Ц. дифференцируемого поля вдоль кривой  $L$  равна потоку *вихря* через какую-либо поверхность  $\Sigma$ , ограниченную кривой  $L$ :

$$\oint_L (\vec{F} d\vec{r}) = \iint_{\Sigma} (\text{Rot } \vec{F}, \vec{n}) d\sigma$$

В поле кулоновского или ньютоновского притяжения, как и во всех других потенциальных полях, Ц. поля по любому замкнутому контуру равна нулю:  $\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) = 0$ .

Лит.: [91].

**ЦИССОИДА ДИОКЛЕСА** — плоская кривая 3-го порядка, уравнение которой в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}.$$

Полярное уравнение Ц. Д. такое:

$$\rho = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi},$$

где  $2a$  — диаметр окружности. Ц. Д. можно рассматривать как множество точек  $M$  пучка прямых с центром  $O$ , лежащим на окружности (рис. 134), для которых справедливо равенство  $|OM| = |KL|$ , где  $K$  и  $L$  — точки пересечения прямой  $OM$  пучка соответственно с окружностью и касательной  $t$  к окружности в точке  $T$ , диаметрально противоположной точке  $O$ .

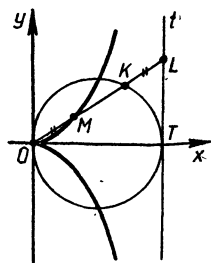


Рис. 134

Ц. Д. названа по имени древнегреческого математика Диоклеса (III в. до н. э.), использовавшего ее для решения делосской задачи, т. е. задачи об удвоении куба. Древние рассматривали только часть циссоиды, заключенной внутри окружности; эта часть ее вместе с дугой окружности напоминает лист плюща.

Греч. *κισσοειδής* от *κισσος* — плющ, *ειδής* — вид, форма.

Лит.: [74].

**ЦИФРОВЫЕ МАШИНЫ** — математические машины дискретного действия. Числа в Ц. м. представляются в виде последовательности цифр. Для записи (фиксирования) каждой цифры применяется какой-либо прибор (элемент); каждому состоянию этого прибора (элемента) поставлена в соответствие какая-либо цифра. Число представляется с помощью набора таких элементов. Ц. м. обеспечивают высокую точность расчетов и являются универсальными математическими машинами. Вычисления на простейших Ц. м., арифмометре и различных ручных счетно-клавишных машинах требовали больших затрат времени. В настоящее время благодаря появлению быстродействующих электронных Ц. м. с программным управлением этот недостаток устранен. См. также: *Микрокалькулятор*.

**ЦИФРЫ** — знаки для обозначения чисел. В истории математики известно множество различных Ц., изменявшихся с течением времени у разных народов по-разному. Наиболее примитивная запись Ц. была словесная, сохранявшаяся у математиков Средней Азии и Ближнего Востока вплоть до X в. и встречающаяся даже позже. Наиболее древними из известных являются вавилонские и древнеегипетские Ц.

См. также: *Славянские цифры, Римские цифры, Арабские цифры, Позиционная система счисления, Непозиционная система счисления*.

**ЧАСТИЧНО-УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО.** То же что и *Упорядоченное множество*.

**ЧАСТИЧНЫЙ ПРЕДЕЛ.** 1°. Ч. п. *последовательности* чисел  $C_1, C_2, \dots, \dots, C_n, \dots$  — число  $b$  (или один из символов  $\pm \infty$ ) такое, что существует *подпоследовательность*  $C_{k_1}, C_{k_2}, \dots, C_{k_m}, \dots$  данной последовательности, для которой  $\lim_{m \rightarrow \infty} C_{k_m} = b$ .

2°, Ч. п. функции  $y = f(x)$  в точке  $a$  (другими словами, при  $x \rightarrow a$ ) — такое число  $b$  (или один из символов  $\pm \infty$ ), что для некоторой последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , имеющей пределом  $a$  (причем  $x_n \neq a$ ), соответствующая последовательность значений функции  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$  имеет предел  $b$  (или соответственно  $\pm \infty$ ). Если все Ч. п. совпадают, то функция  $f(x)$  имеет *предел* в точке  $a$ , совпадающий с общим значением Ч. п. Ч. п. справа (соответственно слева) функции  $y = f(x)$  в точке  $a$ , т. е. Ч. п. при  $x \rightarrow a + 0$  (соответственно при  $x \rightarrow a - 0$ ), определяется таким же образом, но с дополнительным условием, что члены последовательности  $x_n > a$  (соответственно  $x_n < a$ ). Аналогично определяется понятие Ч. п. функции при  $x \rightarrow +\infty$  или  $x \rightarrow -\infty$ .

Примеры. 1. Ч. п. функции  $y = \sin(1/x)$  при  $x \rightarrow 0$  является любое число  $a$ , где  $a \in [-1; 1]$ . Для  $x_n = 1/(\arcsin a + 2\pi n)$  имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(1/x_n) = a$ .

2. Для функции  $y = x \sin^2 x$  Ч. п. пределами при  $x \rightarrow +\infty$  являются все  $a \in [0, \infty[$ .

**ЧАСТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ.** 1°. Ч. п. функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  нескольких переменных по переменному  $x_i$  в точке  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  — конечный предел  $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} (\Delta_i u / \Delta x_i)$ , где  $\Delta_i u = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  — *частное приращение* функции  $u$  в точке  $M_0$ ; при этом предполагается, что функция  $u$  определена в некоторой окрестности точки  $M_0$ .

Ч. п. по  $x_i$  является *производной* функции  $u = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$

одного переменного  $x_i$  в точке  $x_i^0$  (остальные переменные зафиксированы на значениях  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0$ ).

Ч. п. есть функция координат точки  $M_0$ , т. е. является функцией тех же переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , что и функция  $u$ . Для обозначения Ч. п. приняты символы:  $\partial u / \partial x_i, \partial f(x_1, x_2, \dots, x_n) / \partial x_i$  (использовать для Ч. п. круглое  $\partial$  вместо прямого  $d$  в обозначении обычной производной предложил Якоби):  $u'_{x_i}, f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n), D_{x_i}$  и  $D_{x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . В случае функции  $u = f(x, y)$  двух переменных Ч. п.  $\partial u / \partial x$  в точке  $(x_0, y_0)$  имеет такой геометрический смысл: плоскость  $y = y_0$  пересекает поверхность  $u = f(x, y)$  по некоторой кривой  $L$ ; если  $\partial u / \partial x$  существует, то существует касательная в точке  $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  к кривой  $L$ ; причем если  $\alpha$  есть угол, образуемый этой касательной с плоскостью  $xOy$ , то  $\partial u / \partial x = \operatorname{tg} \alpha$  (рис. 135).

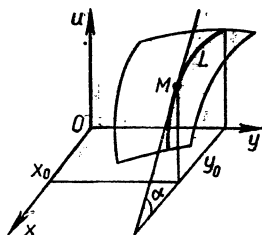


Рис. 135

2°. Ч. п. высшего порядка. Частная производная 2-го порядка от функции  $u = f(x, y)$  по переменным  $x$  и  $y$  определяется как Ч. п. по  $y$  от Ч. п. данной функции по  $x$  и обозначается:  $\partial^2 u / \partial x \partial y = \partial^2 f(x, y) / \partial x \partial y$ , или  $u''_{xy} = f''_{xy}(x, y)$ . Таким образом,  $\partial^2 u / \partial x \partial y = \partial(\partial u / \partial x) / \partial y$ . Аналогично определяется Ч. п. 2-го порядка по другим парам переменных (взятых в определенном порядке):  $\partial^2 u / \partial x \partial x = \partial(\partial u / \partial x) / \partial x$  (короче обозначается:  $\partial^2 u / \partial x^2, \partial^2 u / \partial x \partial y, \partial^2 u / \partial y \partial x, \partial^2 u / \partial y^2$ ). Всего Ч. п. 2-го порядка от функции двух переменных 4 = 2<sup>2</sup>. Ч. п. 3-го порядка определяется как Ч. п. от Ч. п. 2-го порядка и обозначается аналогично предыдущему, например:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial y} = \frac{\partial \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)}{\partial y},$$

и т. д. — всего 8 = 2<sup>3</sup> Ч. п. 3-го порядка.

Аналогично определяется и обозначается Ч. п. 4-го, 5-го и т. д. порядков для функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от  $n$  переменных. Ч. п.  $k$ -го порядка от функции  $n$  переменных будет  $n^k$ . Однако при широких условиях число различных Ч. п.  $k$ -го порядка значительно уменьшается (см. *Перестановка дифференцирования*). Приведем формальное индуктивное определение Ч. п. высшего порядка. Ч. п. 1-го порядка по переменному  $x_i$  в точке  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  от функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  определена в 1°. Ч. п.  $k$ -го порядка по переменным  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}$  (индексы  $i_1, i_2, \dots, i_k$  образуют некоторое размещение с повторениями из цифр 1, 2, ...,  $k$ ) в точке  $M_0$  от функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется Ч. п. по переменному  $x_{i_k}$  в точке  $M_0$  от функции, являющейся Ч. п.  $(k-1)$ -го порядка по переменным  $x_1, x_2, \dots, x_{i_{k-1}}$  от функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , предполагая, что эта Ч. п.  $(k-1)$ -го порядка существует во всех точках некоторой окрестности точки  $M_0$ . Эта Ч. п.  $k$ -го порядка обозначается символом:

$$\partial^k u / \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k},$$

Как следует из определения, для существования  $k$ -й Ч. п. в точке  $M_0$  необходимо существование предыдущей Ч. п. в некоторой окрестности точки  $M_0$ .

Лит.: [87].

**ЧАСТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ** — нахождение *частных производных*.

**ЧАСТНОЕ ОТ ДЕЛЕНИЯ** числа  $a$  на число  $b \neq 0$  — результат деления  $a$  на  $b$ . Ч. о. д. числа  $a$  на число  $b$  есть такое число  $x$ , что выполняется равенство  $bx = a$  или  $xb = a$ . Ч. о. д.  $a$  на  $b$  называется также, но реже отношением числа  $a$  к числу  $b$  или отношением чисел  $a$  и  $b$ .

Аналогично определяется Ч. о. д. многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$ . См. также: *Деление, Произведение многочленов, Сумма*.

**ЧАСТНОЕ ПРИРАЩЕНИЕ** функции нескольких переменных  $u = f(x, y, \dots, t)$  — приращение, получаемое величиной  $u$ , когда придано приращение лишь одной из независимых переменных. Например, Ч. п. по переменной  $x$  будет:  $\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, \dots, t) - f(x, y, \dots, t)$ .

**ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ** какого-либо уравнения получается из его общего решения при определенных значениях произвольных постоянных, входящих в общее решение. Эти конкретные значения произвольных постоянных обычно определяются какими-либо дополнительными условиями, задаваемыми вместе с уравнениями. Так, если требуется найти решение уравнения  $y'' = k^2 y$  при  $0 \leq x < \infty$ , обращающееся в 0 на бесконечности и равное 1 при  $x = 0$ , то в общем решении  $y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$  полагаем  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$  и имеем Ч. р.

**ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ** дифференциального уравнения  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  — интеграл этого уравнения, получающийся из общего интеграла  $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$  при некотором конкретном наборе постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

**ЧАСТОТА**: 1°. Ч. периодической функции  $f(t)$  — величина  $\omega$ , обратная периоду, т. е.  $\omega = \frac{1}{T}$ . Так, например, периодическая функция  $\sin 3t$  имеет период  $T = \frac{2\pi}{3}$ , частоту  $\omega = \frac{3}{2\pi}$ .

2°. Ч. случайного события, которое может произойти или не произойти в результате эксперимента, есть отношение  $m : n$  числа  $m$  экспериментов, в которых это событие произошло, к числу  $n$  всех экспериментов. При больших  $n$  Ч. события обычно близка к его вероятности (см. *Теория вероятностей*).

**ЧЕБЫШЕВА ЗАКОН** — одна из форм закона больших чисел (см. *Больших чисел закон*).

**ЧЕБЫШЕВА МНОГОЧЛЕНЫ** — система ортогональных функций. Названа в честь русского математика П. Л. Чебышева, впервые определившего их и занимавшегося их изучением. Ч. м. называются многочлены  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  ( $n \in N$ ) или

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n - \frac{n}{1!}2^{n-3}x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!}2^{n-5}x^{n-4} - \dots$$

Ч. м. ортогональны на  $[-1; 1]$  относительно веса  $1/\sqrt{1-x^2}$ . Для Ч. м. справедлива рекуррентная формула  $T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$ . Ч. м. играют важную роль при разложении функции, непрерывной на  $[-1; 1]$ , в ряд по много-

членам. Важным свойством Ч. м. является то, что многочлен  $T_n(x)/2^{n-1}$  наименее уклоняется от 0 на отрезке  $[-1; 1]$ .

Ч. м. — частный случай *Якоби многочленов*. Кроме Ч. м., известны еще многочлены Чебышева — Лагерра и многочлены Чебышева — Эрмита. Многочлены Чебышева — Лагерра определяются по формуле:  $L_n(x) = (-1)^n e^x d^n (x^n e^{-x}) / dx^n$ ;  $n \in \mathbb{Z}_0$ . Они ортогональны на полупрямой  $x \geq 0$  относительно веса  $e^{-x}$ . Рекуррентное соотношение для многочленов Чебышева — Лагерра:  $L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$ . Многочлены Чебышева — Эрмита определяются формулой  $H_{n+1}(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Они ортогональны на всей прямой относительно веса  $e^{-x^2}$ . Рекуррентные соотношения для многочлена Чебышева — Эрмита:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0; \quad H'_n(x) - 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

**ЧЕБЫШЕВА НЕРАВЕНСТВО:** 1°. Ч. н. в теории вероятностей — неравенство  $P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$ , где  $\xi$  — случайная величина,  $M\xi$  — математическое ожидание,  $D\xi$  — дисперсия,  $\varepsilon > 0$  произвольно.  $P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\}$  — вероятность того, что случайная величина  $\xi$  примет значение, удовлетворяющее условию:  $|\xi - M\xi| < \varepsilon$ . Неравенство Чебышева и его обобщения применяются при доказательстве закона больших чисел.

2°. Ч. н. в теории чисел. Если через  $\pi(x)$  обозначить число простых чисел, не превосходящих  $x$ , то существуют постоянные числа  $a, b$  ( $a < b$ ) такие, что выполняется неравенство

$$a \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b \frac{x}{\ln x}$$

при  $x \geq 2$ , называемое Ч. н. Далее П. Л. Чебышев показал, что в качестве  $a$  и  $b$  для Ч. н. можно взять  $a = 0,921$  и  $b = 1,06$ . Ч. н. явилось крупнейшим вкладом в развитие теории простых чисел. В частности, из него легко было получено П. Л. Чебышевым доказательство *Бертрана постулата*.

Лит.: [17].

**ЧЕВИАНА**, или Чевы прямая, — см. *Чевы теорема*.

**ЧЕВЫ ТЕОРЕМА** — у т в е р ж д е н и е: если прямые, соединяющие вершины треугольника  $ABC$  с точкой  $O$ , лежащей в плоскости треугольника, пересекают противоположные стороны или их продолжения соответственно в точках  $A', B', C'$  (рис. 136), то справедливо равенство

$$\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = 1.$$

При этом отношение векторов рассматривается как положительное число, если они (например,  $\overrightarrow{AC'}$  и  $\overrightarrow{C'B}$ ) имеют одинаковое направление (сонаправлены), и отрицательное в противном случае.

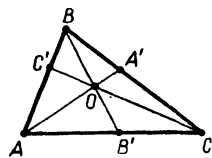


Рис. 136

Ч. т. можно записать и в такой форме:

$$(AB \ C') \cdot (BC \ A') \cdot (CA \ B') = 1,$$

где  $(AB \ C')$  — простое отношение трех точек  $A$ ,  $B$  и  $C'$ . Справедлива и обратная теорема: если три точки  $C'$ ,  $A'$ ,  $B'$  расположены соответственно на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника или их продолжениях так, что выполняется равенство

$$(AB \ C') \cdot (BC \ A') \cdot (CA \ B') = 1,$$

то прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке или параллельны (пересекаются в несобственной точке).

Прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ , пересекающиеся в одной точке и проходящие через вершины треугольника, называются прямыми Чебы или чевианами. Ч. т. носит проективный характер; эта теорема метрически двойственна Менелая теореме. Ч. т. названа в честь итальянского геометра Джованни Чева, доказавшего ее (1678).

Лит.: [41, 35].

**ЧЕРТЕЖ ФИГУРЫ** — изображение этой фигуры, выполненное на плоскости (на ее модели) в той или иной проекции с соблюдением установленных обозначений и указанием масштаба.

См. также: *Аксометрия, Полное изображение, Польке — Шварца теорема, Проекция, Рисунок.*

Лит.: [92].

**ЧЕТВЕРКИ-БЛИЗНЕЦЫ** — четверки простых чисел вида:  $p_1 = n - 4$ ,  $p_2 = n - 2$ ,  $p_3 = n + 2$ ,  $p_4 = n + 4$ , где  $n \in N$ .

Предполагают, что Ч.-б., так же как и пар-близнецов, имеется в множестве натуральных чисел бесконечное множество. Однако как первое, так и второе из этих предположений до сих пор не доказано и не опровергнуто.

Примеры Ч.-б.: 5, 7, 11, 13; 11, 13, 17, 19.

Самая большая из известных в настоящее время Ч.-б. указана А. Ферье; это следующие четыре простых числа:

$$\begin{array}{ll} 2\ 863\ 308\ 731, & 2\ 863\ 308\ 733, \\ 2\ 863\ 308\ 737, & 2\ 863\ 308\ 739. \end{array}$$

Лит.: [75].

**ЧЕТНАЯ ПОДСТАНОВКА** — подстановка ( $n$ -й степени), в которой сумма числа инверсий в обеих ее строках четна. Подстановка четна тогда и только тогда, когда ее декремент четен. Число всех Ч. п.  $n$ -й степени равно  $n!/2$ .

Со совокупность всех Ч. п. относительно операции умножения подстановок образует знакопеременную группу.

**ЧЕТНАЯ ФУНКЦИЯ** — функция  $y = f(x)$ , область определения которой симметрична относительно нуля и для каждого  $x$  из области определения имеет место равенство  $f(-x) = f(x)$ . График Ч. ф. симметричен относительно оси ординат.

Примеры Ч. ф.: 1)  $y = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ; 2)  $y = \cos x$ ,  $x \in R$ ; 3)  $y = \lg |x|$ , где  $x \in R \setminus 0$ .

См. также: *Нечетная функция.*

**ЧЕТНЫЕ ЧИСЛА** — целые числа, кратные 2. Ч. ч. можно записать в виде  $2k$ , где  $k \in Z$ . Ч. ч. можно определить как целые числа, которые в десятичной записи оканчиваются четной цифрой (0, 2, 4, 6, 8).

**ЧИСЕЛ ТЕОРИЯ** — отдел математики, посвященный изучению свойств целых чисел, рациональных и алгебраических. Ч. т. изучает также и свойства произвольных чисел, вытекающие из возможности приближения этих чисел числами рациональными.

Ч. т. стала развиваться очень давно. Уже в VI в. до н. э. в пифагорейской школе в Греции изучались различные свойства целых чисел (их делимость, деление на подклассы: простые, составные, квадратные), структура совершенных чисел, было дано решение уравнения  $x^2 + y^2 = z^2$  в целых числах (см. *Пифагоровы числа*).

Ч. т. были посвящены труды греческих математиков Евклида, Эратосфена, Диофанта. В Китае в связи с составлением календарей Ч. т. занимались ученые Сунь-цзы (между II — VI вв.), Цинь Цзю-шао (XIII в.). В Индии исследовались решения уравнений в целых числах (Брамагупта, VII в.; Бхаскара, XII в.).

В Европе интенсивное развитие Ч. т. начинается с работы Ферма (XVII в.) (см. *Ферма великая теорема*). Огромный вклад в развитие Ч. т. внес петербургский математик Л. Эйлер, заложивший основы аналитической Ч. т. Из приведенных же трех знаменитых проблем Эйлера, поставленных им в переписке с Х. Гольдбахом, две остались до сих пор нерешенными (а первая из них решена в 1937 г. советским математиком акад. И. М. Виноградовым): 1) всякое нечетное число есть сумма трех простых чисел; 2) четное число есть сумма двух простых чисел; 3) нечетное число есть сумма вида  $p + 2k^2$  (где  $k$  — целое число, а  $p$  — простое).

В формировании Ч. т. в смысле строгой ее систематизации оказали существенное влияние работы выдающегося немецкого математика К.-Ф. Гаусса: им была построена теория сравнений, заложены основы современной теории форм, введены в рассмотрение тригонометрические суммы.

Выдающийся вклад в Ч. т. внес великий русский математик П. Л. Чебышев, который получил ряд первоклассных результатов о простых числах (см. *Чебышева неравенство* в теории чисел, *Бертрана постулат*).

В настоящее время в Ч. т. используются элементарные и аналитические методы для решения проблем распределения простых чисел в различных числовых последовательностях; изучаются также алгебраические числа, являющиеся обобщением понятия целых чисел (см. *Алгебраические числа*). Специальный раздел Ч. т. составляет решение диофантовых уравнений и нахождение диофантовых приближений.

Лит.: [13, 19].

**ЧИСЛЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ** (числовое значение) *алгебраического выражения* (функции)  $f(a, b, \dots, z)$  — всякое число, полученное в результате подстановки в выражение  $f$  вместо букв  $a, b, \dots, z$  каких-либо конкретных действительных чисел из области допустимых значений этих букв и выполнения над этими числами тех же действий (операций), которые должны производиться над буквами.

Пр и м е р. Ч. з.  $f(a, b) = ab : (a^2 - b^2)$  при  $a = 2$ ,  $b = 1$  равно  $2/3$ , т. е.  $f(2; 1) = 2/3$ .

Нахождение Ч. з. выражений является одним из видов упражнений, обеспечивающих функциональную пропедевтику в школе.

Лит.: [29, 30].

**ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ** — раздел математики, посвященный приближенному вычислению определенных интегралов (в тех случаях, когда точное аналитическое вычисление невозможно или крайне сложно) и решению дифференциальных уравнений. При аналитических методах приближенного



вычисления интегралов подынтегральную функцию заменяют каким-либо более простым выражением, чаще всего интерполяционным многочленом, принимающим в некоторых точках (узлах интерполяции)  $x_k$  значения  $f(x_k)$ . Тогда формулы Ч. и. имеют вид:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

где  $A_k$  зависят от промежутка интегрирования, вида функции, числа узлов интерполяции. Эти формулы именуются *квадратурными* или формулами механических квадратур. Простейшими из них являются *Котеса формулы* (в них точки  $x_k$  делят отрезок  $[a; b]$  на равные части), к числу которых относятся общепотребительные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона (или парабол) (см. *Прямоугольников формула, Симпсона формула, Трапеций формула*). В случае, когда узлы интерполяции не делят промежутков  $[a; b]$  на равные части, были получены формулы для вычисления интеграла от многочлена степени не выше  $2n - 1$  ( $n$  — число узлов интерполяции) Гауссом,  $(2n - 3)$  — Марковым,  $(n - 1)$  — Чебышевым. Ряд формул Ч. и. получил акад. В. А. Стеклов. Часто употребляется формула Эйлера, дающая выражение интеграла через значения подынтегральной функции и ее производных в некоторых точках и через числа Бернулли (см. *Эйлера формула, Бернулли числа*), и *Лапласа формула*, которая дает выражение интеграла через значения функции и конечные разности этих значений.

Приближенное решение дифференциального уравнения получается, если искать решение в виде бесконечного ряда и ограничиться конечным числом его членов (см. *Неопределенных коэффициентов метод*). При решении различных *краевых задач* часто пользуются *тригонометрическими рядами* и более общими рядами ортогональных функций. Если уравнение содержит члены с малыми постоянными множителями, так что этими членами приближенно можно пренебречь по сравнению с остальными, то решение этого уравнения ищут в виде ряда, первым членом которого является решение без малых членов, а остальные члены ряда расположены по возрастающим степеням малой величины, входящей в уравнение (малого параметра). Для решения дифференциальных уравнений существуют многочисленные аналитические методы (см. *Последовательных приближений метод, Рунге метод*).

Численные методы позволяют находить приближенное решение при некоторых значениях аргумента, пользуясь известными значениями решения в одной или нескольких точках.

Наиболее часто используются *Рунге и Эйлера методы*, а также различные разностные формулы, где решение ищется в виде линейной комбинации:

$$y'(x_i), \quad \eta_i = hf(x_i, y_i), \quad \Delta \eta_j = \eta_{j+1} - \eta_j, \quad \Delta^i \eta_j = \Delta^{i-1} \eta_{j+1} - \Delta^{i-1} \eta_j.$$

Примером может служить Адамса метод и его обобщение, полученное Штёрмером.

Существуют графические методы решения дифференциальных уравнений, многие из которых строятся на основании численных методов. В последнее время для решения дифференциальных уравнений широко используются электронные вычислительные машины.

Лит.: [34, 90].

**ЧИСЛИТЕЛЬ;** 1°. **Ч. обыкновенной дроби**  $p/q$  ( $p$  — целое,  $q \in \mathbb{N}$ ) — число  $p$ , равное числу  $q$ -х долей единицы. Число  $q$  называется при этом знаменателем дроби (делителем). **Ч. обыкновенной дроби** называется также делимым.

2°. **Ч. алгебраической дроби**  $\frac{f(a, b, \dots, z)}{\varphi(a, b, \dots, z)}$  есть многочлен  $f$  (делимое). Многочлен  $\varphi$  называется при этом знаменателем дроби (делителем). **Ч. и знаменатель дроби** (обыкновенной или алгебраической) называются членами дроби.

**ЧИСЛО** — одно из основных понятий математики, возникшее впервые в связи с потребностями счета предметов и совершенствовавшееся затем по мере развития математических знаний. Уже в трудах античных ученых было установлено, что ряд натуральных чисел бесконечен (III в. до н. э.). Проблемы бесконечности натурального ряда, ряда простых чисел и построение названий для сколь угодно больших чисел обсуждаются в знаменитом произведении Евклида «Начала» и в книге Архимеда «Об исчислении песка» («Псаммит»).

С введением понятий сложения, вычитания, умножения и деления начинает развиваться наука о числах и действиях над ними — арифметика. Изучение глубоких закономерностей в натуральном ряду чисел продолжается до настоящего времени и составляет чисел теорию. Понятие натурального числа кажется таким простым и естественным, что в науке долгое время не ставился вопрос об определении его в терминах каких-либо простых понятий.

Обоснование понятия натурального числа стало необходимым лишь в середине XIX в. в связи с развитием аксиоматического метода в математике и разработкой основ математического анализа. Это было сделано в 70-х годах XIX в. в работах немецкого математика Кантора на основании понятия множеств, их равномощности, т. е. сопоставимости элементов одного множества элементам другого. Число предметов в совокупности, число элементов в множестве определяется как то общее, что имеет данная совокупность и всякая другая ей равномощная. Другое понятие натурального числа было дано итальянским математиком Пеано на основании сформулированных им аксиом (см. Пеано аксиомы).

Первым обобщением натуральных чисел были дробные числа, возникшие в связи с потребностью производить измерения какой-либо величины, что заключается в сравнении ее с какой-либо другой величиной — эталоном (см. Дроби). Все дальнейшие расширения понятия числа уже не были более вызваны потребностями счета и измерения, а явились следствием развития науки. Первым из них было введение отрицательных чисел, обусловленное развитием алгебры. В Европе отрицательные числа ввел в употребление в XVII в. французский ученый Декарт. Далее были введены иррациональные числа. Изучение понятия непрерывности в работах немецких математиков Дедекинда, Кантора и Вейерштрасса привело к дальнейшему уточнению понятия числа и его свойств. Развитие теории алгебраических уравнений привело (XVIII в.) к введению понятия комплексного числа. Комплексные числа образуют поле, и, как установил Вейерштрасс, совокупность всех комплексных чисел не может быть далее расширена за счет присоединения новых чисел так, чтобы в расширенной совокупности сохранились все законы действий, имеющие место в совокупности комплексных чисел. См. также: Натуральное число, Рациональное число, Действительное число, Алгебраическое число, Трансцендентное число, Кардинальное число,  $e$ -Число,  $\pi$ -Число. Лит.: [31, 95].

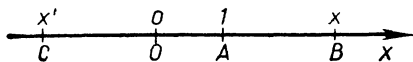


Рис. 137

**ЧИСЛОВАЯ ОСЬ** — прямая, служащая для изображения действительных чисел, на которой заданы: 1) точка  $O$  — начало отсчета; 2) положительное направление от точки  $O$  к точке  $A$ ; 3) единичный отрезок  $OA$  (масштаб). Всякое

действительное число изображается точкой  $\mathcal{C}$ . о. по следующим правилам: число нуль изображается точкой  $O$ ; положительное число  $x$  изображается точкой  $B$  (обозначаемой также  $x$ ) такой, что лучи  $OB$  и  $OA$  сонаправлены (имеют положительное направление на оси), и отношение длины отрезка  $OB$  к длине отрезка  $OA$  равно  $x$ ; отрицательное (действительное) число  $x'$  изображается точкой  $C$  (обозначаемой также  $x'$ ) такой, что луч  $OC$  имеет направление, противоположное направлению луча  $OA$ , т. е. отрицательное направление, и отношение длины отрезка  $OC$  к длине отрезка  $OA$  равно абсолютной величине числа  $x'$  (рис. 137).

Это соответствие между числами и точками  $\mathcal{C}$ . о. взаимно однозначно. Поэтому часто не делают различия между числом  $x$  и соответствующей ему точкой на  $\mathcal{C}$ . о., которая может обозначаться также точкой  $x$ , и множество действительных чисел  $R$  также называют  $\mathcal{C}$ . о. Расстояние между точками  $x_1$  и  $x_2$  на  $\mathcal{C}$ . о. равно модулю разности соответствующих чисел  $x_1$  и  $x_2$ , т. е. равно  $|x_2 - x_1|$ .

$\mathcal{C}$ . о. иногда (не совсем точно) называют координатной прямой или *числовой прямой*. (Заметим, что координатных прямых много, а числовая прямая одна — множество действительных чисел.)

**ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ** — последовательность, члены которой являются числами.

**ЧИСЛОВАЯ ПРЯМАЯ** — то же, что и *числовая ось*.

**ЧЛЕН МНОГОЧЛЕНА** от  $n$  неизвестных (или переменных):  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в некотором поле  $P$  — выражение (функция) вида

$$A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad (*)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — целые неотрицательные числа — показатели степеней соответствующих неизвестных, а коэффициент  $A$  — элемент из поля  $P$ . Порядок следования множителей в  $\mathcal{C}$ . м. можно произвольно менять.

Сумма нескольких  $\mathcal{C}$ . м. называется *многочленом* над полем  $P$ .

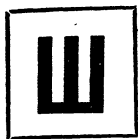
Если  $\mathcal{C}$ . м. имеет вид (\*), то при  $A \neq 0$  число  $\alpha_i$  называется степенью члена (\*) относительно неизвестного  $x_i$ , степенью члена (\*) по совокупности всех неизвестных (переменных) называется число, равное  $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ .

**ЧЛЕН ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ**  $n$ -го порядка:

$$(*) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— всякое произведение  $n$  элементов этого определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца со знаком  $+$  или  $-$ .

Всего у определителя (\*) существует  $n!$  членов. Например, при  $n=4$  у этого определителя будет  $\mathcal{C}$ . о. произведение  $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$ , но не будет  $\mathcal{C}$ . о. произведение  $a_{13}a_{32}a_{22}a_{41}$ , так как в последнем произведении участвуют два элемента  $a_{22}$  и  $a_{13}$ , не лежащие в разных столбцах, а принадлежащие к одному и тому же (второму) столбцу.



**ШАЛЯ ЛЕММА** о трех точках на прямой — утверждение: для любых трех точек  $A, B, C$  числовой оси имеет место равенство векторов:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Лит.: [3].

**ШАР** — множество точек трехмерного евклидова пространства, расстояние от каждой из которых до данной точки не больше расстояния  $R$ . Данная точка называется центром Ш., а расстояние  $R$  — радиусом его. Если центр Ш. совпадает с началом координат и радиус его равен  $R$ , то Ш. с центром  $O$  и радиусом  $R$  можно определить как множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

Ш. можно определить как тело вращения полукруга вокруг оси, содержащей диаметр полукруга. Граничные точки Ш. образуют сферу с тем же центром и тем же радиусом. Всякое сечение Ш. плоскостью есть круг. Ш. есть пространственный аналог круга. Объем Ш. равен:  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ , а площадь поверхности его есть производная объема по радиусу:  $S = V'_R = 4\pi R^2$ .

Среди всех тел равного объема Ш. имеет наименьшую площадь поверхности, а среди всех тел равной площади поверхности Ш. имеет наибольший объем. Минимальность поверхности Ш. экспериментально подтверждается опытом Плато или опытом с мыльным пузырем (мыльная пленка в силу поверхностного натяжения стремится стянуться в поверхность наименьшей площади).

Ш. имеет бесконечное множество осей и плоскостей симметрии и один центр.

См. также: *Изопериметрическая задача, Метрическое пространство, Открытый шар.*

Лит.: [1, 95].

**ШАРОВОЙ ПОЯС** — часть шаровой (сферической) поверхности, заключенная между двумя секущими параллельными и не совпадающими плоскостями. Ш. п. иначе называют зоной. Ш. п. представляет собой боковую поверхность *шарового воя.*

**ШАРОВОЙ СЕГМЕНТ** — см. *Сегмент 3°.*

**ШАРОВОЙ СЕКТОР** — геометрическое тело, полученное от вращения кругового сектора вокруг диаметра.

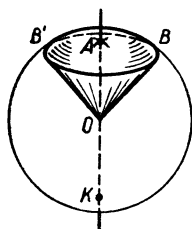


Рис. 138

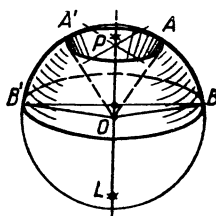


Рис. 139

При этом различают Ш. с. двух родов (типов). Если радиус кругового сектора  $AOB$  расположен на оси вращения  $AK$  (рис. 138), то полученный при этом Ш. с. ( $BOB'$ ) называется Ш. с. первого рода. Если же диаметр  $PL$  не пересекает дуги  $AB$  кругового сектора  $AOB$  (рис. 139), то полученный при этом Ш. с.  $ABOA'B'$  называется Ш. с. второго рода. Ш. с. второго рода всегда невыпуклая фигура. Объем Ш. с.

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H, \text{ где } H — \text{высота Ш. с.}, R — \text{радиус шара.}$$

**ШАРОВОЙ СЛОЙ** — часть шара, заключенная между различными секущими параллельными плоскостями. Два круга, полученные в сечении шара параллельными плоскостями, называются основаниями Ш. с.

**ШАРОВЫЕ ФУНКЦИИ** — однородные гармонические функции  $n$ -й степени:

$$U_n = \sum_{p+q+r=n} a_{p,q,r} x^p y^q z^r.$$

Общее число линейно независимых однородных гармонических полиномов  $n$ -й степени, являющихся Ш. ф., равно  $2n + 1$ . Ш. ф. выражаются через сферические функции  $Y_n(\theta, \varphi)$  по формуле

$$U_n = r^n Y_n(\theta, \varphi)$$

( $r, \theta, \varphi$  — сферические координаты).

Каждой Ш. ф.  $u_n$  степени  $n$  соответствует Ш. ф.  $r^{2n-1} u_n$  степени  $n - 1$ . Ш. ф. являются решением уравнения Лапласа в задачах математической физики для областей, ограниченных сферическими поверхностями.

**ШВАРЦА ТРЕУГОЛЬНИК** — треугольник, вершинами которого являются основания высот данного остроугольного треугольника. Ш. т. обладает интересным свойством: из всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник  $ABC$ , Ш. т. имеет наименьший периметр (см. Вписанный многоугольник). Ш. т. называют ортоцентрическим треугольником данного остроугольного  $\triangle ABC$ .

**ШЕННОНА ТЕОРЕМА** — одна из основных теорем теории информации (см. Теория информации).

**ШТЕЙНЕРА ПОСТРОЕНИЯ** — геометрические построения на плоскости, выполняемые с помощью только одной линейки (односторонней, математической). Ш. п. были в основном исследованы швейцарским геометром Я. Штейнером, который доказал, что любую планиметрическую задачу на построение, выполняемую циркулем и линейкой, можно решить, пользуясь только одной линейкой,

если на плоскости задан круг и известен его центр. Ш. п. носят проективный характер и противопоставляются *Маскерони построениям*, выполняемым только одним циркулем.

**ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ ЗАДАЧА** — граничная задача для дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} (-p(x)y')' + q(x)y &= \lambda y, \\ A_1 y(a) + B_1 y'(a) &= 0, \\ A_2 y(b) + B_2 y'(b) &= 0. \end{aligned}$$

Необходимо отыскать отличные от нуля решения (*собственные функции*), а также значения параметра  $\lambda$  (*собственные значения*), при которых существуют эти решения. Если на  $p(x)$ ,  $q(x)$  наложить некоторые условия, Ш. — Л. з. сведется к аналогичной для уравнения

$$-y'' + q(x)y = \lambda y. \quad (*)$$

Показано, что если функция  $q(x)$  в уравнении (\*) непрерывна и действительна на  $[a; b]$ , а  $A_1, B_1, A_2, B_2$  — действительные числа, то существует возрастающая последовательность действительных собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ , стремящаяся к бесконечности, и каждому значению  $\lambda_n$  соответствует собственная функция (с точностью до постоянного множителя)  $\varphi_n(x)$ , которая имеет ровно  $n$  нулей на участке  $a \leq x \leq b$ . Функции  $\varphi_n(x)$  образуют полную, ортогональную систему функций на  $[a; b]$ .

**ШТУРМА ПРАВИЛО** — правило, позволяющее находить непересекающиеся интервалы, содержащие каждый по одному корню данного многочлена. Ш. п. состоит в следующем. Дан многочлен  $f(x)$  без *кратных корней*. Рассмотрим систему многочленов:  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_s(x)$ , где  $f_0(x) = f(x)$ ,  $f_1(x) = f'(x)$ ,  $f_{k+1} = f_k(x) \cdot q_k(x) - f_{k-1}(x)$  ( $k = 2, 3, \dots, s$ ), где  $q_k(x)$  — многочлен такой, что степень  $f_{k+1}(x)$  меньше степени  $f_k(x)$ . Эта система обладает свойствами: 1)  $f_k$  и  $f_{k+1}$  ( $k = 0, 1, \dots, s-1$ ) не имеют общих корней; 2) многочлен  $f_s$  не имеет действительных корней; 3) из  $f_k(x_0) = 0$  следует, что  $f_{k-1}(x_0)f_{k+1}(x_0) < 0$  ( $k = 1, 2, \dots, s-1$ ); 4) из  $f(x_0) = 0$  следует, что  $f_1(x_0)f'(x_0) > 0$ . Обозначим  $\theta(\alpha)$  число перемен знака в ряду чисел  $f_0(\alpha), f_1(\alpha), \dots, f_s(\alpha)$ , где  $\alpha$  — любое вещественное число. Тогда  $|\theta(b) - \theta(a)|$  равно числу действительных корней, заключенных между  $a$  и  $b$  ( $b > a$ ).

Лит.: [42, 47].

**ШТУРМА ТЕОРЕМЫ** — теоремы о нулях решений линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Пусть  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — линейно независимые решения уравнения  $y'' + q(x)y = 0$ . Если  $x_1, x_2$  — последовательные нули  $y_1(x)$ , то  $y_2(x)$  имеет в точности один нуль между  $x_1$  и  $x_2$ .

Очень важной является так называемая теорема сравнения, которая состоит в следующем: даны два уравнения  $y'' + q_1(x)y = 0$ ,  $z'' + q_2(x)z = 0$  и  $q_2(x) \geq q_1(x)$  в интервале  $[a; b]$ ; тогда между двумя нулями любого решения  $y_1(x)$  первого уравнения содержится хотя бы один нуль каждого решения  $z_1(x)$  второго уравнения.

Ш. т. применяются при исследовании собственных значений *Штурма — Лиувилля задачи* для уравнения  $y'' + q(x)y = \lambda y$  с однородными граничными условиями.

**ЭВОЛЬВЕНТА** кривой  $m$  — такая кривая  $l$ , для которой кривая  $m$  является *эволютой*. Э. может быть получена как траектория конца  $A$  или  $D$  нити, которая наматывается на линию  $m$  или разматывается с нее (рис. 140); отсюда и происходит название Э. — «развертка».

Э. пространственной кривой можно определить как ортогональную траекторию касательных к этой кривой.

Лит.: [61, 71].

**ЭВОЛЮТА** кривой  $l$  — геометрическое место центров кривизны кривой  $l$ . Кривая  $l$  по отношению к своей Э. называется *эвольвентой* или инволютой Э. Касательные к Э. являются нормальными к эвольвенте.

Лит.: [55, 71].

**ЭЙЗЕНШТЕЙНА КРИТЕРИЙ** — достаточное условие для того, чтобы многочлен с целыми коэффициентами был *неприводимым* в поле рациональных чисел. Если  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  — многочлен с целочисленными коэффициентами, то Э. к. утверждает, что для неприводимости многочлена  $f(x)$  в поле рациональных чисел достаточно существования простого числа  $p$ , такого, что  $a_0$  не делится на  $p$ ,  $a_i$  делится на  $p$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ , но  $a_n$  не делится на  $p^2$ . Например, многочлены  $x^n \pm 2$ ,  $x^n \pm 10$ ,  $x^n \pm 6$  при любом натуральном числе  $n > 1$  по Э. к. являются неприводимыми в поле рациональных чисел.

**ЭЙЛЕРА ДИАГРАММЫ** — плоские фигуры, иллюстрирующие пересечение, объединение и разность конечного числа множеств. В качестве фигур на плоскости могут быть взяты прямоугольники, круги и другие фигуры. В литературе иногда Э. д. называют диаграммами Венна или кругами Эйлера. Э. д. — хорошее наглядное средство при обучении математике в средней школе.

См. также: *Диаграмма*.

**ЭЙЛЕРА ИНТЕГРАЛЫ** первого и второго рода — соответственно интегралы вида:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \text{ и } \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Первый Э. и. представляет собой функцию от двух параметров  $p$  и  $q$  — функцию  $B$  (бета): он изучался И. Ньютоном, Дж. Валлисом, Эйлером, именем

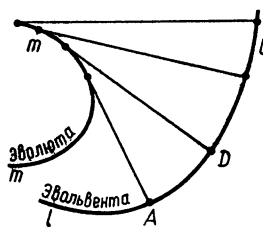


Рис. 140

которого и назван по предложению Лежандра. Функция  $B(p, q)$  симметрична, т. е.  $B(p, q) = B(q, p)$  имеет место формула:

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1),$$

последовательное применение которой приводит (при  $b \in \mathbb{N}$ ) к

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a+1} B(a, 1) = \\ = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{(a+1)(a+2) \dots (a+n-1)},$$

если же и  $a$  равно натуральному числу  $m$ , то  $B(m, n) = (n-1)! (m-1)! / (m+n-1)!$ . Имеют место также формулы:

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy, \quad B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad (\text{при } 0 < a < 1),$$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Второй Э. и.  $\Gamma(z)$  (*гамма-функция*) рассматривался Эйлером (1729—1730).

Название дано Лежандром. Формула  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$  определяет справа от мнимой оси регулярную функцию, которая может быть продолжена влево от мнимой оси. Оказывается, что  $\Gamma(z)$  — *мероморфная функция*, имеющая простые полюса  $z = 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$  с *вычетом*  $(-1)^n \cdot n!$  в полюсе  $z = -n$ .  $\Gamma(z)$  обладает рядом интересных свойств. Например:  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ,  $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z$ ,  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

Э. и. первого и второго рода связаны соотношением:  $B(p, q) = \Gamma(p) \Gamma(q) / \Gamma(p+q)$ . При  $z = a > 0$  имеет место известная формула Эйлера — Гаусса:

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{a(a+1) \dots (a+n-1)} (n-1)^a.$$

При натуральном  $n$  выполняется:  $\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2) \dots (a+1) \cdot a \cdot \Gamma(a)$ .  $\Gamma(a) \rightarrow \infty$  при  $a \rightarrow \infty$ .

Для  $(\Gamma(z))^{-1}$  может быть получено выражение в виде *бесконечного произведения*:

$$[\Gamma(z)]^{-1} = ze^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}},$$

где  $C$  — *Эйлера постоянная*,  $k$  — натуральное. Из этой формулы видно, что  $1/\Gamma(z)$  есть *целая функция*.

Имеет место также формула:

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{m}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{m}\right) \dots \Gamma\left(z + \frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2} (m-1)} m^{\frac{1}{2} - mz} \Gamma(mz).$$



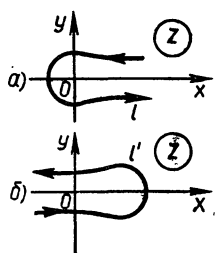


Рис. 141

Функция  $\Gamma(z)$  может быть выражена также контурным интегралом вида  $\Gamma(z) = \left( \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \right) \int_{(l)} e^{-t} t^{z-1} dt$ ,

где  $l$  — контур, представленный на рис. 141, а или в виде:  $1/\Gamma(z) = (1/2\pi i) \int_{(l')} e^{\tau} \tau^{-z} d\tau$  (контур  $l'$  дан на рис.

141, б). Через интеграл Эйлера может быть выражена гипергеометрическая функция:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \Gamma(\gamma) \cdot \Gamma(\gamma - \alpha - \beta) / \Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta).$$

**ЭЙЛЕРА КРИТЕРИЙ** в теории сравнений служит для распознавания квадратичных вычетов и квадратичных невычетов по простому модулю  $p$ . Э. к. формулируется так: если  $(a, p) = 1$ , где  $p$  — простое нечетное число, то

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left( \frac{a}{p} \right) \pmod{p},$$

где  $\left( \frac{a}{p} \right)$  — Лежандра символ.

**ЭЙЛЕРА МЕТОД** ломаных — один из простейших методов численного решения дифференциальных уравнений и доказательства существования их решений — предложен Эйлером в 1768 г. Основная идея этого метода состоит в применении рядов для вычисления приближенных значений решения  $y(x)$  дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$  в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$  некоторого фиксированного отрезка  $[x_0; b]$ , где  $x_0$  определяет начальное условие  $y(x_0) = y_0$ .

Для вычисления  $y(x_1)$ , где  $x_1 = x_0 + h$ ,  $h = \frac{b - x_0}{n}$ , следует представить  $y(x_1)$  в виде ряда по степеням  $h = x_1 - x_0$ , взяв затем конечное число членов этого ряда. Если ограничиться лишь двумя первыми членами ряда, то получим:

$$y(x_k) = y(x_{k-1}) + hf(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad x_k = x_0 + hk, \quad \text{где } y_k = y(x_k).$$

Это и есть метод ломаных: на каждом отрезке  $[x_k; x_{k+1}]$  интегральная кривая заменяется прямолинейным отрезком ломаной Эйлера. Доказывается при весьма общих предположениях, что при  $h \rightarrow 0$  ломаные Эйлера всегда стремятся к интегральной кривой.

Лит.: [8].

**ЭЙЛЕРА ОКРУЖНОСТЬ** — другое название окружности девяти точек.

**ЭЙЛЕРА ПОДСТАНОВКИ** — три типа подстановок, приводящих интегралы вида  $\int R(x, y) dx$ , где  $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  и  $R(x, y)$  — рациональная функция от  $x$  и  $y$ , к интегралам от рациональных функций.

Если  $a > 0$ , то применяется первая Э. п.:  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$ ; если  $c > 0$ , то вторая Э. п.:  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$ ; если корни трехчлена  $ax^2 + bx + c > 0$  действительны и  $\lambda$  — один из корней, то применяется третья Э. п.:  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda)$ .

**ЭЙЛЕРА ПОСТОЯННАЯ** — предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = C = 0,577215 \dots$ ,

рассмотренный Эйлером, давшим для  $C$  некоторые представления в форме рядов и интегралов, например:

$$C = \int_0^1 \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\ln x} \right) dx, \quad 1-C = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} (\zeta(n) - 1),$$

где  $\zeta(n)$  — дзета-функция. Э. п. встречается в различных классах специальных функций. Об Э. п. до сих пор стоит открытым вопрос, является ли  $C$  числом алгебраическим или трансцендентным.

**ЭЙЛЕРА ПРЯМАЯ** — прямая, на которой расположены центроид; треугольника (точка пересечения медиан)  $M$ , центр  $O$  описанного круга и ортоцентр  $H$ . При этом имеет место равенство

$$|OM| : |MH| = 1 : 2.$$

В разностороннем и равнобедренном треугольниках существует единственная Э. п., причем в равнобедренном треугольнике Э. п. совпадает с его осью симметрии. В разностороннем треугольнике существует целый пучок Э. п. Э. п. названа в честь великого математика Л.йлера, установившего упомянутое свойство прямой.

Лит.: [41, 1, 63].

**ЭЙЛЕРА СПИРАЛЬ** — то же самое, что и *Корню спираль*, или *клотоида*.

**ЭЙЛЕРА ТЕОРЕМА:** 1°. Э. т. в теории сравнений — утверждение: если  $(a, m) = 1$ , то  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ , где  $\varphi(m)$  — Эйлера функция.

2°. Э. т. о многогранниках — утверждение: для всякого многогранника нулевого рода справедлива формула  $B + \Gamma - P = 2$ , где  $B$  — число вершин,  $\Gamma$  — число граней,  $P$  — число ребер многогранника. Впервые эту зависимость подметил Р. Декарт; поэтому Э. т. о многогранниках иногда называют Декарта — Эйлера теоремой о многогранниках. Число  $B + \Gamma - P = 2$  называется *эйлеровой характеристикой*.

См. также: *Род*.

**ЭЙЛЕРА ТОЖДЕСТВА:** 1°. Э. т. о пятиугольных числах

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{\frac{3k^2-k}{2}} \quad (\text{см. Пентагональные числа}).$$

$$2^\circ. \text{ Э. т. о простых числах: } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1},$$

здесь произведение берется по всем простым числам  $p$ .

3°. Э. т. о четырех квадратах:

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = \\ & = (ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp + cs - dr)^2 + (ar - bs - cp + dq)^2 + \\ & \quad + (as + br - cq - dp)^2. \end{aligned}$$

См. также: *Эйлера формулы*.

**ЭЙЛЕРА УРАВНЕНИЕ** дифференциальное: 1°. Э. у. д. обыкновенное — дифференциальное уравнение вида

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0,$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — постоянные. Заменой  $x = e^t$  оно приводится к уравнению с постоянными коэффициентами. Например, для уравнения

$$x^2 y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0,$$

полагая  $x = e^t$ , имеем:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - n(n+1)y = 0.$$

2°. Э. у. — уравнение вида

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} X &= a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4, \\ Y &= a_0 y^4 + a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4, \end{aligned}$$

рассматривалось Эйлером в ряде работ в 1753 г. Он показал, что общее решение этого уравнения имеет вид:  $F(x, y) = 0$ , где  $F(x, y)$  — симметрический многочлен четвертой степени от  $x$  и  $y$ ; этот результат Эйлера играет важную роль в теории эллиптических интегралов.

Лит.: [85].

**ЭЙЛЕРА ФОРМУЛА** для приближенного вычисления определенных интегралов — формула, дающая выражение интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  через значения функции  $f(x)$  и ее производных в некоторых точках:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= h \left( \frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(n-1)h) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} f(b) \right) - \frac{h^2}{12} (f'(b) - f'(a)) + \dots + (-1)^p \frac{B_p h^{2p}}{(2p)!} (f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)) + R_{2p}, \end{aligned}$$

$$\text{где } R_{2p} = (-1)^p h^{2p+1} \int_a^b f^{(2p+1)}(x) Q_{2p+1}(x) dx,$$

$$Q_{2p+1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n(x-a)}{2^{2p} \pi^{2p+1} n^{2p+1}},$$

$h = (b-a)/n$ ,  $B_p$  — Бернулли числа.

Э. ф. является весьма точной; если требуемая точность не очень велика, то можно ограничиться лишь членами, содержащими производные нескольких первых порядков. Э. ф. находит также применение при численном решении интегрального уравнения Вольтерра второго рода (см. *Интегральные уравнения*).

Лит.: [8].

**ЭЙЛЕРА ФОРМУЛЫ** — некоторые наиболее важные формулы, установленные Л. Эйлером: Э. ф., связывающие тригонометрические и показательные функции:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \\ e^{ix} &= \cos x + i \sin x; \end{aligned}$$

Э. ф., выражающая разложение функции  $\sin x$  в бесконечное произведение:

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Э. ф. о кривизнах, выражающая кривизну  $1/R$  любого нормального сечения поверхности через ее главные кривизны  $1/R_1$  и  $1/R_2$  и величину угла  $\varphi$  между одним из главных направлений и данным направлением:

$$1/R = (\cos^2 \varphi)/R_1 + (\sin^2 \varphi)/R_2.$$

Имеются также другие формулы: формула суммирования Эйлера — Маклорена, формулы Эйлера — Фурье, дающие коэффициенты разложения функций в тригонометрические ряды, и т. д.

См. также: *Эйлера тождества*.

**ЭЙЛЕРА ФУНКЦИЯ** в теории чисел. Под Э. ф.  $\varphi(n)$ , определенной для  $n \in \mathbb{N}$ , понимают число целых положительных чисел, взаимно простых с  $n$  и не превосходящих  $n$ . Например,  $\varphi(10) = 4$ ,  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi(17) = 16$ . Э. ф. является мультипликативной функцией. Э. ф. фигурирует в так называемой *Эйлера теореме* в теории сравнений. Если каноническое разложение в произведение простых чисел для числа  $n$  имеет вид:  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ , то Э. ф. по определению равна:  $\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}) \dots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1})$ , т. е.  $\varphi(\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^k (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1})$ .

**ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА** — число  $B + \Gamma - P$ , характеризующее количественное соотношение между числом вершин ( $B$ ), числом граней ( $\Gamma$ ), числом ребер ( $P$ ) многогранника. Если многогранник выпуклый или гомеоморфен выпуклому, то его Э. х. равна двум. См.: *Род поверхности*.

Лит.: [68].

**ЭЙЛЕРОВЫ УГЛЫ** — углы  $\varphi, \psi, \theta$ , определяющие положение прямоугольной декартовой системы координат  $Ox'y'z'$  относительно другой прямоугольной декартовой системы координат  $Oxyz$  с той же ориентацией; были введены Эйлером (1748). Э. у. рассматриваются как углы последовательных поворотов одной системы относительно осей другой, после которых обе системы совпадут. Первый поворот делается вокруг оси  $Oz$  на угол  $\varphi$ , затем промежуточная система  $Ox_1y_1z_1$  поворачивается на угол  $\theta$  вокруг оси  $Ox_1$ , и, наконец, полученная таким образом система поворачивается на угол  $\psi$  вокруг оси  $Oz'$ . Э. у.  $\varphi, \psi, \theta$  берутся с учетом направления поворота. Используя Э. у., можно написать формулу перехода от координат  $x'y'z'$  к  $xyz$ :

$$\begin{aligned} x &= (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta)x' - (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta)y' + \\ &\quad + \sin \varphi \sin \theta z', \\ y &= (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta)x' + (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta)y' - \\ &\quad - \cos \varphi \sin \theta z', \\ z &= \sin \varphi \sin \theta x' + \cos \psi \sin \theta y' + \cos \theta z'. \end{aligned}$$

Этими формулами пользуются в механике при изучении движения твердого тела с неподвижной точкой.

**ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.** 1°. Э. в. бесконечно большие —  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , такие, для которых  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x)/\beta(x)) = 1$ ; это пишут так:  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ . Например, при  $x \rightarrow \pi/2$  имеем:  $\lg x \sim 1/(\pi/2 - x)$ ; при  $x \rightarrow \infty$  имеем:  $x + \sin x \sim x \sim x + 1 \sim x + 2$ .

**2° Э. в. бесконечно малые** —  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , такие, для которых  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x)/\beta(x)) = 1$ ; это пишут так:  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ . Например, при  $x \rightarrow 0$  имеем:  $\sin x \sim x$ .

При отыскании пределов любые бесконечно малые и бесконечно большие можно заменять Э. в.

**ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ** — два высказывания  $A$  и  $B$ , каждое из которых следует из другого. Э. в. либо оба ложны, либо оба истинны (верны). Э. в. называют также равносильными высказываниями или равносильными утверждениями. Если высказывания  $A$  и  $B$  эквивалентны, то это записывают так:  $A \Leftrightarrow B$ .

**П р и м е р ы.** 1. Вокруг всякого треугольника в плоскости Евклида можно описать окружность.

2. Сумма величин углов любого треугольника равна  $180^\circ$ . Высказывания 1) и 2) являются Э. в. относительно аксиоматики Гильберта.

**ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МНОЖЕСТВА** — множества, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие. Э. м. называют также равномощными (и, менее удачно, равночисленными) множествами. Таким образом, всякие два множества либо эквивалентны, либо нет. Отношение эквивалентности множеств рефлексивно, симметрично и транзитивно (см. *Рефлексивность, Симметричность, Транзитивность*). Поэтому совокупность всех множеств распадается на классы эквивалентных множеств. На этом пути мы приходим к понятию мощности множества и *кардинальных* чисел, являющихся обобщением натуральных чисел.

**ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ** — то же самое, что и *равносильные уравнения*.

**ЭКВИДИСТАНТА** — множество точек плоскости Лобачевского, расположенных по одну сторону от прямой  $a$  и находящихся от нее на одинаковом расстоянии  $h$ . Прямая  $a$  называется базой Э., а расстояние  $h$  — высотой Э. Всякая прямая имеет с Э. не более двух общих точек. Если в плоскости Евклида множество точек, расположенных по одну сторону от прямой на данном расстоянии  $h$ , есть прямая, то в плоскости Лобачевского такое множество точек есть кривая, называемая Э. В планиметрии Лобачевского Э. остаются инвариантными относительно сдвигов плоскости. Э. можно истолковать как кривую равных расстояний. Э. иначе называют *гиперциклом*.

Лат. *aequidistans* — равноудаленный, равноотстоящий, на равном расстоянии.

**ЭКВИДИСТАНТНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ** — поверхность, полученная от вращения *экидистанты* (гиперцикла) вокруг одной из ее осей. Э. п. можно определить как множество точек пространства Лобачевского, расположенных по одну сторону от какой-либо плоскости  $\alpha$  и отстоящих от нее на одинаковом расстоянии  $h$ . Плоскость  $\alpha$  называется базой Э. п., а длина перпендикуляра  $h$ , проведенного из какой-либо точки Э. п. на базу, называется высотой Э. п. Э. п. есть пространственный аналог экидистанты, подобно тому как в евклидовой геометрии сфера есть пространственный аналог окружности, а параллельные плоскости есть пространственный аналог параллельных прямых.

См. также: *Лобачевского геометрия, Неевклидова геометрия*.

**ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ** — функция  $y = e^x$  или  $y = a^x$ ,  $a > 0, a \neq 1$ , т. е. показательная функция. Э. ф. обозначают также  $y = \exp_a x$ .

**ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ** — распространение результатов, полученных из наблюдений над одной частью явления, на другую его часть. Так, если известны значения функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[x_0; x_n]$ , то по ее значениям в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ( $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ) можно определить значения функции в точках, лежащих вне отрезка  $[x_0; x_n]$ . Аппаратом для этого служит, например, параболическая Э., при которой в качестве значения  $f(x)$  в точке  $x$  берется значение многочлена  $P_n(x)$  степени  $n$ , принимающего в  $n+1$  точке  $x_i$  заданные значения  $y_i = f(x_i)$ . Для параболической Э. используются обычные интерполяционные формулы, например формула Ньютона для равноотстоящих точек  $x_i = x_0 + ih$ :

$$P_n(x_n + th) = y_n + \frac{t}{1!} \Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0,$$

где  $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ . Например, если для функции  $y = f(x)$  составлен ряд частных значений  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , соответствующих  $a, a+h, \dots, a+nh$ , то

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \Delta y_2 = y_3 - y_2, \dots$$

и

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2, \dots,$$

наконец

$$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0, \Delta^n y_1 = \Delta^{n-1} y_2 - \Delta^{n-1} y_1, \dots$$

Погрешность, совершаемая при вычислении по этой формуле значения  $f(x)$  в точке  $x = x_n + th$ , не превышает

$$M h^{n+1} \frac{t(t+1) \dots (t+n)}{(n+1)!},$$

где  $M$  — максимум абсолютной величины  $(n+1)$ -й производной функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_0; x]$ .

Лит.: [8].

**ЭКСТРЕМАЛЬ** — интегральная кривая дифференциального уравнения Эйлера, встречающаяся в вариационном исчислении.

Лит.: [49].

**ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ТОЧКА** — точка, в которой функция имеет экстремум.

**ЭКСТРЕМУМ** — термин, объединяющий понятия максимума и минимума. Следует различать локальный или относительный Э. от глобального или абсолютного Э.

Лат. extremum — крайнее значение.

**ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ** кривой 2-го порядка (конического сечения) — число, равное отношению расстояния от любой точки кривой 2-го порядка до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы. Э. эллипса меньше единицы, у гиперболы Э. больше единицы и у параболы равен единице. Э. характеризует вид, форму кривой 2-го порядка: если у двух кривых 2-го порядка Э. равны, то кривые подобны между собой (т. е. одинаково сжаты, сплюснуты).

Для эллипса, если Э. приближается к нулю, то эллипс приближается по своей форме к окружности, если же Э. эллипса будет приближаться к единице,

то эллипс будет более вытянутым (сжатым, сплюснутым) и будет стремиться занять положение отрезка — большой оси эллипса  $2a$ .

Для гиперболы, если  $\varepsilon$  стремится к единице, то угловой коэффициент асимптот по модулю стремится к нулю, а следовательно, ветви гиперболы все более приближаются (сжимаются) к действительной оси  $x$ , стремясь выродиться в два луча; если же  $\varepsilon$  гиперболы неограниченно возрастает ( $\rightarrow \infty$ ), то ветви гиперболы все более распрямляются, стремясь занять положение двух прямых:  $x = a$ ,  $x = -a$ .

Лат.:  $ex$  — вне,  $centrum$  — центр.

Лит.: [3, 69].

### ЭЛЕКТРОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЦИФРОВЫЕ МАШИНЫ (ЭВЦМ) —

электронные вычислительные машины, предназначенные для обработки информации, представленной в дискретной форме, т. е. в виде цифровых кодов. В аналоговых вычислительных машинах обрабатываемая информация представлена в аналоговой (непрерывной) форме.

Цифровые вычислительные машины имеют большую точность по сравнению с аналоговыми вычислительными машинами. Перспективными являются гибридные вычислительные машины, в которых обрабатывается информация, представленная частично в дискретной и частично в непрерывной форме.

Лит.: [28].

### ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ (ЭВМ) —

вычислительные машины, основными элементами которых являются электронные приборы. Первое поколение ЭВМ, появившееся в середине 40-х годов XX в. (в 1946 г. — в США и в 1950 г. — у нас в СССР), было выполнено на электронных лампах, второе поколение — на полупроводниках (полупроводниковых приборах), и третье — на интегральных микросхемах и т. д. Для переработки информации ЭВМ могут быть объединены в различные комплексы и системы. Благодаря своим высоким качествам (быстродействию, компактности, надежности, автоматизации вычислительных процессов и др.) ЭВМ получили широкое распространение и использование в различных областях научно-технических расчетов, обработке информации (планирование, учет, прогнозирование, автоматическое управление, решение задач распознавания образов и др.).

ЭВМ иначе называют компьютером. Термин *компьютер* часто встречается в литературе; англ. *computer* от лат. *computo* — считаю, вычисляю.

**ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА** — раздел элементарной математики, изучающий вопросы уравнений и неравенств, простейшие (элементарные) функции, понятие числа и предела, тождественные преобразования, вопросы комбинаторики, а также некоторые другие вопросы. С изменением программ по математике в средней школе границы Э. а. также изменяются. Э. а. является частью *алгебры* в более широком понимании.

**ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ** — геометрия, определяемая в основном группой *перемещений* (движений, изометрий) и группой *подобия*. Э. г. изучается в средней общеобразовательной школе. Однако содержание Э. г. не исчерпывается указанными преобразованиями. Так, к Э. г. также относят преобразование *инверсии*, вопросы *сферической геометрии*, элементы *геометрических построений* (конструктивная геометрия), теорию измерения геометрических величин и другие вопросы. Э. г. продолжает развиваться и в настоящее

Лит.: [1, 41, 63]

**ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА** — часть математики, изучаемая в средней школе. Э. м. содержит *арифметику, элементарную алгебру, элементарную геометрию* и начала *математического анализа*. В Э. м. входят элементы теории множеств, элементы математической логики (высказывание, необходимое и достаточное условия, понятие истинности и ложности высказывания и др.), пропедевтика понятия группы преобразований (произведение преобразований, композиция их, обратное преобразование, тождественное преобразование), элементы векторной алгебры и др.

См. также: Чисел теория, Алгебра, Геометрия, Теорема, Дискретная математика.

**ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ** квадратной матрицы  $A = \|a_{ij}\|$  — степени двучленов  $(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, (\lambda - \lambda_2)^{p_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{p_s}$ , получающихся из характеристического уравнения этой матрицы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21}\lambda & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

следующим образом. Любой минор  $k$ -го порядка определителя  $\Delta(\lambda)$  является многочленом относительно  $\lambda$ . Пусть  $D_k(\lambda)$  — наибольший общий делитель всех таких многочленов. Каждый последующий многочлен в последовательности  $D_0(\lambda) \equiv 1, D_1(\lambda), D_2(\lambda), \dots, D_n(\lambda) = \Delta(\lambda)$  делится на предыдущий. Такие частные разложим на множители в поле комплексных чисел:

$$\begin{aligned} D_n(\lambda)/D_{n-1}(\lambda) &= (\lambda - \lambda')^{a_1} (\lambda - \lambda'')^{a_2} \dots, \\ D_{n-1}(\lambda)/D_{n-2}(\lambda) &= (\lambda - \lambda')^{b_1} (\lambda - \lambda'')^{b_2} \dots, \\ &\vdots \\ D_1(\lambda)/D_0(\lambda) &= (\lambda - \lambda')^{l_1} (\lambda - \lambda'')^{l_2} \dots. \end{aligned}$$

Степени  $(\lambda - \lambda')^{a_1}, (\lambda - \lambda'')^{a_2}, \dots, (\lambda - \lambda')^{l_1}, (\lambda - \lambda'')^{l_2}, \dots$ , образуют полную систему д. матрицы  $A$  (степени с нулевыми показателями исключаются).

Произведение Э. д. равно характеристическому многочлену. Э. д. определяют жорданову форму матрицы.

**ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ** — класс функций, включающий в себя многочлены, рациональные функции, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, также функции, получаемые из перечисленных с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций (т. е. процедуры образования *сложной функции*), **примененных конечное число раз**.



Примеры. 1)  $y = \frac{e^{x^2} - 5}{2 \operatorname{tg} 4x}$ ; 2)  $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  и др.

Класс Э. ф. хорошо изучен и часто применяется в приложениях. Производная от Э. ф. всегда является Э. ф., однако интеграл от Э. ф. может уже не являться Э. ф.

**ЭЛЛИПС** — множество точек плоскости  $\alpha$ , для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек  $F_1$  и  $F_2$ , лежащих в  $\alpha$ , есть величина постоянная, большая, чем расстояние между  $F_1$  и  $F_2$ , и равная данному числу  $2a$  (или отрезку  $2a$ ). Точки  $F_1$  и  $F_2$  называются фокусами  $\phi$  о к у с а м и Э. Расстояние между фокусами, обозначаемое через  $2c$ , называется фокальным. Данное число (отрезок)  $2a$  называется большой осью.

Э. можно начертить так. Взяв нерастяжимую нить длиной  $2a$ , закрепим ее концы в точках  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 142). Затем, натянув эту нить острием карандаша, будем двигать острие карандаша по бумаге. Траектория движения острия карандаша и опишет замкнутую кривую — Э., для которой  $MF_1 + MF_2 = 2a$ , отрезки  $MF_1$  и  $MF_2$  называются фокальными радиусами.

Каноническое (простейшее) уравнение Э. в прямоугольных декартовых координатах имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $b^2 = a^2 - c^2$ . Число (отрезок)  $2b$  называется малой осью Э.

Из уравнения Э. вытекает, что  $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ ,  $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ . Отсюда следует, что координаты точек эллипса удовлетворяют условиям:  $|x| \leq a$  и  $|y| \leq b$ , т. е. Э. расположен внутри прямоугольника со сторонами  $2a$  и  $2b$ . Из уравнения Э. также следует, что Э. имеет центр и две оси симметрии.

Число  $e = \frac{c}{a}$  называется эксцентриситетом Э. Для Э. всегда  $e < 1$ . Если  $F_1 \equiv F_2$  (фокусы совпадают), то Э. вырождается в окружность, для которой совпадающие фокусы являются центром, а эксцентриситет  $e = 0$  (так как при этом  $c = 0$ ).

Параметрические уравнения Э. имеют вид:

$$x = a \cos t, y = b \sin t,$$

Они легко усматриваются из рисунка 143: если отрезок постоянной длины скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым, то точка  $M$  этого отрезка опишет Э. Если точку  $M$  взять на продолжении отрезка  $AB$  (на рисунке точка  $K$ ), то описываемая ею кривая будет также Э. На указанном свойстве построен эллиптический циркуль — прибор, вычерчивающий Э. с различными осями.

Если спроектировать какую-либо окружность на плоскость, не перпендикулярную и не параллельную плоскости окружности, то в проекции получится Э. Если круговой цилиндр пересечь наклонной плоскостью или круговой конус пересечь наклонной плоскостью, имеющей различные общие точки с противоположными образующими конуса, то в сечении получится Э.

Прямые, уравнения которых  $x = \pm \frac{a}{e}$ , называются директрисами Э.

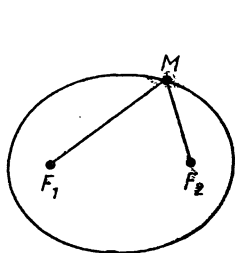


Рис. 142

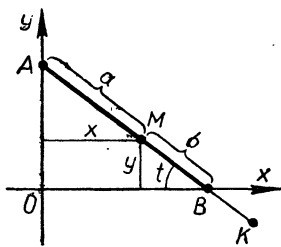


Рис. 143

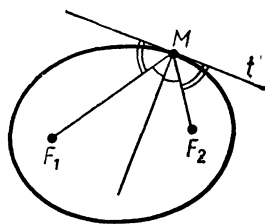


Рис. 144

Касательная  $t$  к Э. составляет равные углы с фокальными радиусами, проведенными в точку касания (рис. 144). Отсюда вытекает, что перпендикуляр  $l$  к касательной в точке касания составляет равные углы с фокальными радиусами. Это свойство можно истолковать как свойства углов падения и отражения, изучаемых в оптике: если точечный источник света поместить в фокусе  $F_1$  и луч света направить на зеркальную поверхность  $t$  по  $F_1M$ , то отраженный луч пойдет по  $MF_2$ , т. е. попадет в точку  $F_2$ . Отсюда происходит и название фокуса (от лат. focus — очаг, огонь).

Свойства Э. используются в технике в конструкциях некоторых станков, где имеются зубчатые шестерни эллиптической формы. Траектории движения планет нашей солнечной системы являются различными Э. Свойства Э. используются также при изучении законов движения планет — законов Кеплера. Полярное уравнение Э. имеет вид:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \alpha},$$

где  $e < 1$ ,  $p$  — фокальный параметр.

При вращении Э. вокруг одной из его осей получается поверхность 2-го порядка — эллипсоид вращения. См. *Конические сечения*.

Греч. ελλειψις — недостаток, в смысле недостатка эксцентриситета до 1. Для Э.  $e < 1$ .

Лит.: [3, 69].

**ЭЛЛИпсоид** — один из видов поверхностей 2-го порядка, каноническое (простейшее) уравнение которого в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где  $a, b, c$  — полуоси Э. Э. имеет центр, три оси и три плоскости симметрии (рис. 145). Любое сечение Э. плоскостью есть эллипс, в частности сечения могут быть и окружностями (см. *Круговая точка*). Э., у которого все три оси  $2a, 2b, 2c$  различны, называется трехосным. Если же две оси Э. одинаковы ( $2a = 2b$ , или  $2a = 2c$ , или  $2b = 2c$ ), то Э. называется Э. вращения. Если все три оси Э. одинаковы ( $2a = 2b = 2c$ ), то Э. превращается в сферу.

Греч. ελλειψις — недостаток, опущение, εἶδος — вид.

Лит.: [3, 69].

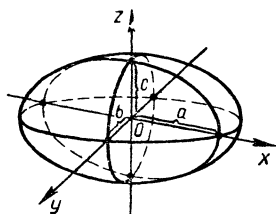


Рис. 145

**ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ** — координаты, связанные с семейством поверхностей 2-го порядка, которое задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2 + \theta} + \frac{y^2}{b^2 + \theta} + \frac{z^2}{c^2 + \theta} = 1, \quad (a > b > c > 0); (*)$$

при этом каждой фиксированной точке  $P(x, y, z)$  отвечают три различных значения  $\lambda, \mu, \nu$  величины  $\theta$ , удовлетворяющие уравнению (\*). Э. к. точки  $P$  называются числа  $\alpha, \beta, \gamma$ , связанные с  $\lambda, \mu, \nu$  соотношениями:

$$\begin{aligned} \lambda &= -(a \operatorname{cn} \alpha)^2 - (b \operatorname{sn} \alpha)^2, \quad \mu = -(a \operatorname{cn} \beta)^2 - (b \operatorname{sn} \beta)^2, \quad \nu = \\ &= -(a \operatorname{cn} \gamma)^2 - (b \operatorname{sn} \gamma)^2, \end{aligned}$$

где  $\operatorname{sn} \alpha, \operatorname{cn} \alpha$  — эллиптические функции Якоби. Э. к. находят применение в различных задачах математической физики. Э. к. называются также эллиптическими координатами в пространстве.

**ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ** — то же, что *Римана геометрия*.

**ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ТОЧКА** поверхности — точка, в которой главные кривизны положительны. Индикатриса Дюпена в такой точке есть эллипс. Если главные кривизны равны между собой, то индикатриса есть окружность, а Э. т. называется омбилической точкой или точкой округления. Справедлива теорема о том, что поверхность, каждая точка которой омбилическая, есть сфера. В окрестности Э. т. поверхность расположена по одну сторону от касательной плоскости в этой точке (в малом).

**ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ** — интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}) dx,$$

где  $R$  — рациональная функция своих аргументов. Эти интегралы, как правило, не берутся в элементарных функциях; если же они могут быть вычислены в элементарных функциях, то их называют псевдоэллиптическими. Все Э. и. с помощью элементарных подстановок (с точностью до слагаемых, выражающихся в конечном виде) приводятся к следующим трем стандартным интегралам:

$$\begin{aligned} &\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \\ &\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (0 < k < 1). \end{aligned}$$

Как показал Лиувиль, эти интегралы уже не берутся в конечном виде. Лежандр назвал их Э. и. соответственно первого, второго и третьего рода. Первые две зависят лишь от  $k$ , а третий еще от одного, вообще говоря, комплексного параметра  $h$ . Они могут быть записаны также в форме Лежандра:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad \int \frac{d\varphi}{(1+h \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Если рассмотреть первые два интеграла в пределах от нуля до  $\varphi$ , то получим вполне определенные функции  $F(k, \varphi)$  и  $E(k, \varphi)$ . Эти функции

глубоко изучены и играют очень важную роль в анализе и его приложениях.

При  $\phi = \frac{\pi}{2}$  Э. н. Лежандра  $F(k)$  и  $E(k)$  называют полными.

Лит.: [87].

**ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ** — координаты, связанные с семейством софокусных эллипсов и гипербол. Э. к.  $u, v$  точки  $M$  связаны с ее декартовыми координатами  $x, y$  соотношениями:  $x = b \operatorname{ch} u \cos v$ ,  $y = b \operatorname{sh} u \sin v$ . Э. к. можно рассматривать как частный случай *эллипсоидальных координат*; они широко используются в математике, физике, технике.

**ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ** представляют собой двоякопериодические мероморфные функции, т. е. такие мероморфные функции  $f(z)$ , для которых оба основных периода  $\tau$  и  $\tau'$  отличны от нуля (см. *Периодические функции*); все их периоды имеют вид:  $T = n\tau + n'\tau'$  ( $n, n' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Так как по теореме

Абея отношение  $\frac{\tau}{\tau'}$  не может быть действительным, то начало координат  $0$  и точки комплексной плоскости  $\tau, \tau', \tau + \tau'$  являются вершинами невырожденного параллелограмма; этот параллелограмм называют параллелограммом периодов.

Любая рациональная комбинация  $R(f_1, f_2, \dots, f_n)$  Э. ф. с периодами  $\tau$  и  $\tau'$  является тоже периодической функцией с периодами  $\tau$  и  $\tau'$ ; это же верно и для производной эллиптической функции.

Лит.: [87].

**ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД** — поверхность 2-го порядка, простейшее уравнение которой в прямоугольных декартовых координатах имеет вид:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

(постоянные величины  $p, q > 0$  называются параметрами Э. п.).

Э. п. имеет форму, изображенную на рисунке 146. Сечения Э. п. плоскостями  $z = h$ , параллельными плоскости  $xOy$ , являются подобными эллипсами, проекция которых на плоскость  $xOy$  имеет уравнение

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h, \text{ или } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $a = \sqrt{2ph}$ ,  $b = \sqrt{2qh}$ . Плоскости  $xOz$ ,  $yOz$  пересекают Э. п. по параболам  $x^2 = 2pz$ ,  $y^2 = 2qz$  (главные параболы) с параметрами  $p$  и  $q$  и осью  $Oz$ . Если  $p = q$ , то Э. п. называется параболоидом вращения. Он получается вращением параболы вокруг ее оси. Параболическое зеркало, образованное вращением дуги параболы вокруг оси, обладает тем свойством, что если поместить источник света в фокусе, то отраженные от зеркальной поверхности лучи будут параллельны, что используется в прожекторных установках.

См. также: *Параболоиды*.

Лит.: [3, 69].

**ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР** — одна из поверхностей 2-го порядка; простейшее уравнение ко-

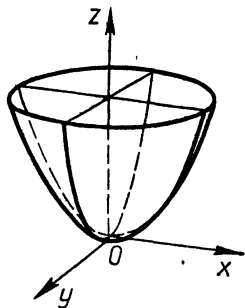


Рис. 146

торой в прямоугольных декартовых координатах имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Образующие этого Э. ц. параллельны оси  $z$ , а направляющей линией является эллипс. См. *Цилиндр*.

Лит.: [3, 69].

**ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ** — формулы, полученные из опыта посредством наблюдения и эксперимента. Имея серию исходных данных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , в результате эксперимента получают соответствующие этим исходным данным результаты:  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Ставят задачу об отыскании такой функции, чтобы отклонение этой функции от реальной зависимости было по возможности мало. Полученная зависимость называется Э. ф. Задача нахождения Э. ф. неоднозначна. Мерой отклонения функции  $f(x)$  от реальной зависимости считают:  $S_1 = \sum_{i=1}^{i=n} |y_i - f(x_i)|$  или  $S_2 = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - f(x_i))^2$  и т. д. Считают из Э. ф. более точной ту, для которой рассматриваемая величина меньше, чем у других.

Противоположностью Э. ф. являются формулы теоретические, полученные дедуктивным методом при тех или иных допущениях, относящихся к рассматриваемым величинам.

**ЭНДОМОРФИЗМ** — отображение множества в себя, сохраняющее алгебраические операции, заданные в этом множестве. Например, проекция линейного пространства на некоторое подпространство есть Э. линейного пространства (этот Э. сохраняет операцию сложения векторов и умножения на число).

См. также: *Аutomорфизм, Изоморфизм, Гомоморфизм*.

**ЭНТРОПИЯ** — одна из термодинамических функций, характеризующих состояние и возможные изменения состояний материальных систем. Важность понятия Э. заключается в том, что ее свойства отражают специфические черты теплового состояния системы. Понятие Э. было введено в 1865 г. Дальнейшее обобщение понятие Э. получило в статистической физике. В последнее время понятие Э. нашло широкое применение в теории информации.

Греч. *εν* — в, *τροπή* — превращение.

Лит.: [17].

**ЭПИТРОХОИДА** — циклоидальная кривая, представляющая собой частный случай *трохоиды*.

Лит.: [74].

**ЭПИЦИКЛОИДА** — плоская кривая, описываемая произвольной точкой  $M$  окружности, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности, имеющей с первой внешнее касание. В зависимости от соотношения радиусов подвижной и неподвижной окружностей получаются различные виды Э. Например, если радиусы указанных окружностей равны, то получим *кардиоиду*.

Параметрические уравнения Э. имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= (r + R) \cos \theta - r \cos \left[ (r + R) \frac{\theta}{r} \right], \\ y &= (r + R) \sin \theta - r \sin \left[ (r + R) \frac{\theta}{r} \right], \end{aligned}$$

где  $r$  — радиус подвижной окружности,  $R$  — радиус фиксированной окружности и  $\theta$  — угол, опирающийся на дугу, концы которой есть точки касания  $K_1$  и  $K$  окружностей.

Если  $r = R$ , то Э. имеет одну дугу (петлю) и называется к а р д и о и д о й; если  $r = \frac{R}{2}$ , то Э. состоит из двух равных дуг; если  $r = \frac{R}{n}$ , то Э. состоит из  $n$  равных дуг. На рисунке 147 рассмотрен случай, когда  $r = \frac{R}{4}$ .

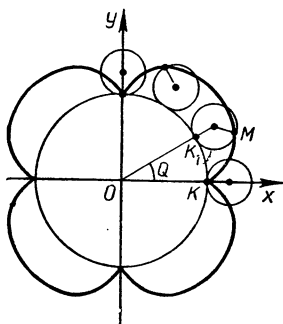


Рис. 147

См. также: *Гипоциклоида*.

Греч. *επι* — на, над, *κυκλος* — круг.

Лит.: [74].

**ЭПСИЛОН-ОКРЕСТНОСТЬ** точки  $a$  — интервал числовой прямой  $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ , где число  $\varepsilon > 0$ , называется радиусом Э.-о. точки  $a$ . Э.-о. называется также  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $a$ .

См. также: *Окрестность точки*.

**ЭПЮР** — термин начертательной геометрии. Э. — двухкартинный (комплексный) чертеж пространственной фигуры, полученный по методу Монжа — методу ортогональных проекций фигуры на две взаимно ортогональные плоскости  $H$  (горизонтальную) и  $V$  (вертикальную) с последующим совмещением этих плоскостей  $H$  и  $V$  путем поворота (вращения) одной из них вокруг оси проекций  $x$  — линии пересечения этих плоскостей. Если ортогональные проекции фигуры берутся на две плоскости  $H$  и  $V$ , то иногда говорят, что Э. двух проекций; если ортогональные проекции фигуры берутся на три попарно взаимно перпендикулярные плоскости, то Э. называют Э. трех проекций.

На Э. (двух проекций) точка, не лежащая на оси проекций и не лежащая в одной из двух биссектральных плоскостей двугранного угла ( $H, V$ ), изображается двумя точками: горизонтальной ее проекцией  $M_2$  и вертикальной проекцией  $M_1$ , т. е. точка  $M$  пространства как бы раздваивается ( $M_1$  и  $M_2$  играют роль координат точки  $M$ ). Прямая  $l$  общего положения на Э. также изобразится двумя прямыми: горизонтальной и вертикальной проекциями (рис. 148).

Э. является менее наглядным изображением фигуры по сравнению с аксонометрической проекцией, или *аксонометрией*.

См. также: *Проекция, Рисунок, Чертеж*.

**ЭРАТОСФЕНА РЕШЕТО** — один из наиболее древних методов выделения («просеивания через решето») из всех натуральных чисел простых чисел. Принадлежит древнегреческому ученому Эратосфену (III в до н. э.). В Э. р. (как его применяют теперь), чтобы выделить (просеять) все простые числа до  $n$ , выписывают все натуральные числа от 2 до  $\sqrt{n}$ . Затем, установив простоту

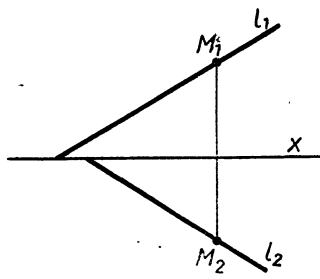


Рис. 148

числа 2, вычеркивают каждое второе число, т. е. все числа, кратные двум; тогда первое оставшееся невычеркнутым число 3 простое. После этого вычеркивают каждое третье число, т. е. все числа, кратные трем; тогда первое оставшееся число 5 простое и т. д.

В настоящее время известен ряд «решет», являющихся усовершенствованием Э. р.

**ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА:** 1°. Э. т. для стационарных вероятностных процессов — теорема, устанавливающая условия, при которых средние по времени от значений процесса  $x(t)$  стремятся к его математическому ожиданию ( $Mx(t)$  не зависит от  $t$  в силу стационарности процесса), т. е. условия, при которых с вероятностью, равной единице, справедливо равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = Mx(t).$$

Эта Э. т. имеет большое значение в статистической физике.

2°. Э. т. для цепей Маркова — теорема, утверждающая, что при определенных условиях вероятность некоторого фиксированного исхода  $n$ -го испытания стремится при  $n \rightarrow \infty$  к пределу, зависящему только от этого исхода. Эта теорема впервые установлена русским ученым А. А. Марковым (старшим).

**ЭРЛАНГЕНСКАЯ ПРОГРАММА** — общий подход к определению различных геометрий с точки зрения группы преобразований. Так, евклидова геометрия определяется группой подобия и ее подгруппой — группой движений; группа аффинных преобразований определяет (характеризует) аффинную геометрию; группа проективных преобразований определяет проективную геометрию; группа проективных преобразований, переводящих в себя некоторый круг или произвольное коническое сечение, определяет геометрию Лобачевского и т. д.

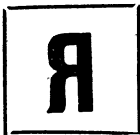
Э. п. была сформулирована известным немецким математиком Ф. Клейном в лекции, прочитанной им в 1872 г. в университете города Эрлангена. Кроме группового определения геометрий, возможно определение их с аксиоматической точки зрения, с помощью системы аксиом.

Лит.: [38].

**ЭРМИТОВА ФОРМА** — выражение вида  $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i \bar{x}_k$ ,  $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$  (черта означает комплексную сопряженность). При помощи Э. ф. задается квадрат длины вектора в комплексном линейном пространстве и скалярное произведение  $(x, y) = \sum a_{ik} x_i \bar{y}_k$  (следовательно, и углы между векторами). Теория Э. ф. во многом аналогична теории квадратичных форм. Так, Э. ф. при помощи унитарных преобразований приводится к виду

$$\sum \lambda_i x_i \bar{x}_i,$$

где  $\lambda_i$  — вещественные числа. Введена французским ученым Ш. Эрмитом.



**ЯДРО:** 1°. **Я. интегрального оператора:**  $L(\varphi) = \int_{\Omega} k(x, y) \varphi(y) dy$  — функция  $k(x, y)$ .

2°. **Я. гомоморфизма** — множество элементов кольца или алгебры, переводящихся данным гомоморфизмом в нуль (в единицу в случае гомоморфизмов групп).

**ЯЗЫКИ:** 1°. **Я. естественные** — языки живые, возникшие стихийно, естественным путем: русский язык, украинский, польский, английский, немецкий и др. Я. е. не являются точными и однозначными.

2°. **Я. искусственные** — формальные языки, созданные для общения человека с машиной, например языки программирования (алгоритмические языки): *алгол*, *фортран* и др.

См. также: *Алгоритмов теория*, *Алфавит*, *Кодирование*.

Лит.: [27, 28].

**ЯКОБИ МНОГОЧЛЕНЫ** — многочлены, определяемые формулой

$$T_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}].$$

Я. м. ортогональны на отрезке  $[-1; 1]$  относительно веса:

$$(1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta}.$$

Я. м. были введены немецким математиком К. Якоби. Я. м. — частный случай гипергеометрической функции. Справедлива следующая формула для Я. м.:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} [T_n^{(\alpha, \beta)}(x)]^2 dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha + \beta + 2n + 1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}.$$

Я. м. используется в теории *представлений групп*.

**ЯКОБИ СИМВОЛ** — обобщение *Лежандра символа*. Я. с. обозначается

$\left(\frac{a}{p}\right)$  (читается: «символ  $a$  по отношению к  $p$ » или «символ  $a$  над  $p$ »). Если  $a$  взаимно просто с числом  $p = p_1 p_2 \dots p_k$ , где  $p_1, p_2, \dots, p_k$  — простые числа, то Я. с. определяется как произведение символов Лежандра:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \left(\frac{a}{p_2}\right) \dots \left(\frac{a}{p_k}\right).$$



Я. с. применяется, как символ Лежандра, к вопросу об установлении того, будет ли число  $a$  *квадратичным вычетом* по модулю  $p$  или невычетом.

**ЯКОБИАН** — определитель вида:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

где  $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — функции, имеющие непрерывные частные производные в некоторой области  $\Delta$ . Сокращенно Я. обозначается через  $\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ .

Название дано по имени немецкого математика Якоби.

Если заданы функции  $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ...,  $y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то вместе с ними задано отображение области  $D$  плоскости  $x_1, x_2, \dots, x_n$  на область  $D'$  плоскости  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Абсолютное значение Я. в некоторой точке равно коэффициенту искажения площадей областей в этой точке. Я. применяется в формулах преобразования кратных интегралов, например:

$$\iint_{D'} \Phi(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \iint_D \Phi[y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)] \left| \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \right| dx_1 dx_2.$$

Я. находит многочисленные применения в теории неявных функций. Так, например, для того чтобы явно выразить в окрестности точки  $M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$  функции  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , неявно заданные уравнениями:

$$\Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \quad (1 \leq k \leq m), \quad (*)$$

требуется, чтобы координаты точки  $M$  удовлетворяли уравнениям  $(*)$  и Я.  $\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}$  в точке  $M$  был отличен от нуля. Для Я. имеет место следующая формула:

$$\frac{D(z_1, z_2, \dots, z_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \cdot \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{D(z_1, z_2, \dots, z_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Лит.: [94]

## ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия, ч. 1. М., Учпедгиз, 1948; ч. 2. М., Учпедгиз, 1951.
2. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М. — Л., 1948.
3. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М., Наука, 1968.
4. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., Наука, 1977.
5. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. Пер. с англ. М., Мир, 1972.
6. Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иванickaя В. П. Геометрия, ч. I. М., Просвещение, 1974; ч. II, М., Просвещение, 1975.
7. Бахман Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии. М., Наука, 1969.
8. Бахвалов Н. С. Методы вычислений. М., Наука, 1976.
9. Бокуть Л. А., Кузьмин Е. Н., Ширшов А. И. Кольца, т. 1—3. Новосибирск, 1973.
10. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М., Наука, 1972.
11. Брадис В. М. Методика преподавания математики в средней школе. М. — Л., Учпедгиз, 1954.
12. Бурбаки Н. Архитектура математики. Математическое просвещение, вып. 5. М., Физматгиз, 1960.
13. Бухштаб А. А. Теория чисел. М., Учпедгиз, 1960.
14. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра, М., Наука, 1976.
15. Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. М., Физматгиз, 1959.
16. Вейль Г. Симметрия. М., Наука, 1968.
17. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.
18. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М., Наука, 1969.
19. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М., Наука, 1972.
20. Воробьев Н. Н. Признаки делимости. М., Наука, 1980.
21. Гаитмахер Ф. Р. Теория матриц. М., Наука, 1966.
22. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М., Наука, 1967.
23. Гильберт Д. Основания геометрии. М. — Л., Гостехиздат, 1948.
24. Гильберт Д., Кон Фоссен С. Наглядная геометрия. М., Наука, 1981.
25. Гильде В., Альтрихтер З. С микрокалькулятором в руках. М., Мир, 1980.
26. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, 1961.
27. Глушков В. М. и др. Алгебра, языки, программирование. Киев, Наукова думка, 1978.
28. Глушков В. М. (ред.) Словарь по кибернетике. Киев, Главная редакция УСЭ, 1979.

29. Гончаров В. Л. Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика. М., Изд-во АПН РСФСР, 1947.
30. Гончаров В. Л. Вычислительные и графические упражнения с функциональным содержанием. М., Изд-во АПН РСФСР, 1948.
31. Депман И. Я. История арифметики. М., Учпедгиз, 1959.
32. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М., Гостехиздат, 1955.
33. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М., Наука, 1971.
34. Евклид. Начала. Пер. с греч., т. 1—6. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
35. Зетель С. И. Новая геометрия треугольника. М., Учпедгиз, 1960.
36. Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру. М., Наука, 1973.
37. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М., Наука, 1977.
38. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Пер. с нем. М.—Л., ГОНТИ, 1937.
39. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М., 1974.
40. Колягин Ю. М. и др. Методика преподавания математики. М., Просвещение, 1975.
41. Кокстер Г. С. Введение в геометрию. Пер. с англ. М., Наука, 1966.
42. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М., Наука, 1977.
43. Крамер Г. Математические методы статистики. Пер. с англ. 2-е изд. М., 1975.
44. Кудрявцев Л. Д. Мысли о современной математике и ее изучении. М., Наука, 1977.
45. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. М., Высшая школа, 1979.
46. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. Пер. с англ. М., Мир, 1970.
47. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., Наука, 1975.
48. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М., Наука, 1975.
49. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. М., Гостехиздат, 1950.
50. Ламбек И. Кольца и модули. Пер. с англ. М., 1971.
51. Лебег А. Об измерении величин. Пер. с франц. М., Физматгиз, 1960.
52. Люстерник Л. А. Выпуклые фигуры и многогранники. М., Гостехиздат, 1956.
53. Люстерник Л. А. и Соболев С. Л. Элементы функционального анализа. М., Гостехиздат, 1950.
54. Мак Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на фортране. Пер. с англ. М., Мир, 1977.
55. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М., Наука, 1970.
56. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М., Гостехиздат, 1950.
57. Мантуров О. В. и др. Толковый словарь математических терминов. М., Просвещение, 1965.
58. Нечаев В. И. Числовые системы. М., Просвещение, 1975.
59. Новиков П. С. Элементы математической логики. М., Наука, 1973.
60. Новоселов С. И. Специальный курс тригонометрии. М., Советская наука, 1954.
61. Норден А. П. Теория поверхностей. М., Гостехиздат, 1956.
62. Норден А. П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского. М., Гостехиздат, 1953.
63. Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии, ч. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1948; ч. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
64. Пизо Ш., Заманский М. Курс математики. М., Наука, 1971.
65. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. Пер. с англ. М., ИЛ, 1957.
66. Пойа Д. Математическое открытие. Пер. с англ. М., Наука, 1970.
67. Понtryгин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1970.

68. Понтрягин Л. С. Основы комбинаторной топологии. М., Наука, 1976.
69. Постников М. М. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1979.
70. Постников М. М. Магические квадраты. М., Наука, 1964.
71. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М., Гостехиздат, 1950.
72. Рашевский П. К. Риманова геометрия, тензорный анализ, М., Наука, 1967.
73. Рудин У. Основы математического анализа. Пер. с англ. М., Мир, 1976.
74. Савелов А. А. Плоские кривые. М., Физматгиз, 1960.
75. Серпинский В. а) Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. Пер. с польск. М., Учпедгиз, 1963; б) О решении уравнений в целых числах. Пер. с польск. М., Физматгиз, 1961.
76. Скорняков Л. А. Элементы алгебры. М., Наука, 1980.
77. Соьер У. У. Прелюдия к математике. Пер. с англ. М., Просвещение, 1972.
78. Соьер У. У. Путь в современную математику. Пер. с англ. М., Мир, 1972.
79. Солодовников А. С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. М., Просвещение, 1966.
80. Столяр А. А. Педагогика математики. Минск, Высшая школа, 1974.
81. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. М., Наука, 1969.
82. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1977.
83. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложение. Пер. с англ., т. I, II. М., Мир, 1967.
84. Федин Н. Г. Геометрия, М., Высшая школа, 1978.
85. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1980.
86. Феферман С. Числовые системы. Пер. с фр. М., Наука, 1971.
87. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1—2. М., Наука, 1969.
88. Фомин С. В. Системы счисления. М., Физматгиз, 1968.
89. Фуше А. Педагогика математики. Пер. с фр. М., Просвещение, 1969.
90. Хемминг Р. В. Численные методы. Пер. с англ. М., Наука, 1968.
91. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М., Наука, 1978.
92. Четверухин Н. Ф. Изображение фигур в курсе геометрии. М., Учпедгиз, 1958.
93. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия. М., Просвещение, 1963.
94. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М., Наука, 1972.
95. Энциклопедия элементарной математики. Т. I—V. М. — Л., Гостехиздат, 1951, 1952, 1963, 1966.
96. Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П. О системном подходе к дидактике. (Ежегодник «Системные исследования» АН СССР, 1978). М., Наука, 1978.
97. Эрдниев П. М. Преподавание математики в средней школе. М., Просвещение, 1978.
98. Юшкевич А. П. и др. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. I—III. М., Наука, 1970, 1972.
99. Яковлев Г. Н. Числовые последовательности и непрерывные функции. М., Просвещение, 1978.
100. Ямпольский А. Р. Гиперболические функции. М., Физматгиз, 1960.

**МАНТУРОВ ОЛЕГ ВАСИЛЬЕВИЧ**  
**СОЛНЦЕВ ЮРИЙ КОНСТАНТИНОВИЧ**  
**СОРКИН ЮРИЙ ИСААКОВИЧ**  
**ФЕДИН НИКОЛАЙ ГЕОРГИЕВИЧ**

**МАТЕМАТИКА В ПОНЯТИЯХ,  
ОПРЕДЕЛЕНИЯХ И ТЕРМИНАХ**

**Часть 2**

Спецредактор  
**Т. В. МАЛКОВА**

Редактор  
**Э. К. ВИКУЛИНА**

Переплет художника  
**Б. Л. НИКОЛАЕВА**

Художественный редактор  
**Е. Н. КАРАСИК**

Технические редакторы  
**В. Ф. КОСКИНА и С. Н. ТЕРЕХОВА**

Корректоры  
**О. С. ЗАХАРОВА и К. А. ИВАНОВА**

ИБ № 6098

Сдано в набор 27.05.81. Подписано к печати 16.02.82.  
60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типографская № 3. Гарнитура  
«Литературная». Печать высокая. Усл. печ. л. 22.  
Усл. кр. отт. 22,19. Уч.-изд. л. 27,04. Тираж  
246 000 экз. Заказ № 136. Цена 85 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство  
«Просвещение» Государственного комитета РСФСР  
по делам издательств, полиграфии и книжной тор-  
говли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц саратовского ордена Трудово-  
го Красного Знамени полиграфического комбината  
Росглавполиграфпрома Государственного комитета  
РСФСР по делам издательств, полиграфии и книж-  
ной торговли в типографии им. Смирнова Смолобл-  
управления издательств, полиграфии и книжной тор-  
говли, г. Смоленск, пр. им. Ю. Гагарина, 2. Заказ  
№ 4103.

85 коп.

